2013년도 하반기(2차) 해경(순경) 공채 수학 (유원지)

1. 1에서 8까지의 정수 중에서 서로 다른 세 개의 수를 선택할 때, 그 중 최대의 수가 7 이상인 것은 몇 가지인가?

① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42

[정답] ①

[해설] 최대의 수가 7 이상이면, 7 또는 8인 두 가지 경우가 있다.

(i) 최대의 수가 7인 경우 : 나머지 두 수는 6 이하여야 하므로

6 이하의 서로 다른 두 자연수를 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_2=15$

(ii) 최대의 수가 8인 경우 : 나머지 두 수는 7 이하여야 하므로

7 이하의 서로 다른 두 자연수를 뽑는 경우의 수는 ${}_7C_2=21$

따라서 $15+21=36$

2. 가로의 길이가 $5cm$이고 세로의 길이가 $7cm$인 직사각형 모양의 천이 있다. 이 천의 가로의 길이를 xcm 늘리고 세로의 길이를 xcm 줄였더니 전체 넓이가 $27cm^2$가 되었다고 한다. 이 때 x의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

[정답] ④

[해설] 길이를 조정한 후의 천의 가로의 길이는 $5+x$이고 세로는 $7-x$이므로

넓이는 $(5+x)(7-x)=-x^2+2x+35=27$

$x^2-2x-8=0,\ (x-4)(x+2)=0 \qquad \therefore x=4\ (\because x>0)$

3. 어떤 약의 효능 지속시간 X는 평균이 5, 표준편차가 2인 정규분포를 따른다고 한다. 이 모집단에서 크기가 100인 표본을 임의추출하여 그 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, $\overline{X}$의 표준편차는?

① 0.2 ② 2 ③ 4 ④ 20

[정답] ①

[해설] X는 $N(5,2^2)$을 따르고,

표본평균 $\overline{X}$는 $N(5,\dfrac{2^2}{100})=N(5,0.2^2)$을 따른다. 따라서 표준편차는 0.2

4. 등차수열 $\{a_n\}$이 $a_3+a_5=10$, $a_4+a_6=16$일 때, a_8+a_{10}의 값은?

① 37 ② 38 ③ 39 ④ 40

[정답] ④

[해설] 등차중항의 성질에 의해 $a_4=5$, $a_5=8$이다.

즉 공차 $d=a_5-a_4=3$이고, $a_9=a_4+5d=5+15=20$이므로

$a_8+a_{10}=2a_9=40$

5. 함수 $f(x)=x^3-3x$에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x-2}$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9

[정답] ④

[해설] 분모가 0으로 가므로 분자도 0으로 간다.

즉 $f(2)-2=0$이므로 $f(2)=2$

따라서 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$ (미분계수의 정의)

$f'(x)=3x^2-3$이므로, $f'(2)=12-3=9$

6. $f:x\to ax+b$ (단, $a>0$), $g:x\to \sin x$라고 한다. $g\circ f$의 치역과 $f\circ g$의 치역이 서로 같을 때, a^2+b^2의 값은?

① 3 ② 2 ③ 1 ④ 0

[정답] ③

[해설] $g\circ f=\sin(ax+b)$, $f\circ g=a\sin x+b$인데,

$\sin(ax+b)=\sin\left\{a(x+\frac{b}{a})\right\}$는 기본형 $\sin x$와 치역이 동일하므로,

$a\sin x+b$의 치역도 $\{-1\le y\le 1\}$이어야 한다.

이때 $-1\le\sin x\le1$, $-a\le a\sin x\le a$, $-a+b\le a\sin x+b\le a+b$

이므로 $-a+b=-1$, $a+b=1$ $\quad\therefore a=1$, $b=0$

$\therefore a^2+b^2=1$

7. 점 $A(3,1)$, $C(4,3)$과 x축 위의 임의의 점 B가 있다. 이 때, $\triangle ABC$의 둘레의 길이의 최솟값은?

① $\sqrt{5}+\sqrt{17}$ ② $\sqrt{5}+4$ ③ $\sqrt{5}+3\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{5}+\sqrt{19}$

[정답] ①

[해설] $\overline{AC}=\sqrt{(4-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}$로 고정이므로

$\overline{AB}+\overline{BC}$를 최소화해야 한다. 이 때, 점 B는 x축 위의 점이므로

점 A를 x축 대칭하여 $A'(3,-1)$이라 하면

$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{A'B}+\overline{BC}\geq\overline{A'C}=\sqrt{(4-3)^2+(3-(-1))^2}=\sqrt{17}$

따라서 둘레의 길이의 최솟값은 $\sqrt{5}+\sqrt{17}$

8. 정의역이 $\{x|-2\leq x\leq 2\}$인 이차함수 $f(x)=x^2+2x+2a-8$의 최솟값이 3일 때, 최댓값을 M이라 하면 $a+M$의 값은?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21

[정답] ①

[해설] $f(x)=(x^2+2x+1)-1+2a-8=(x+1)^2+2a-9$

이므로, $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 $2a-9$를 갖는다.

즉 $2a-9=3$에서 $a=6$

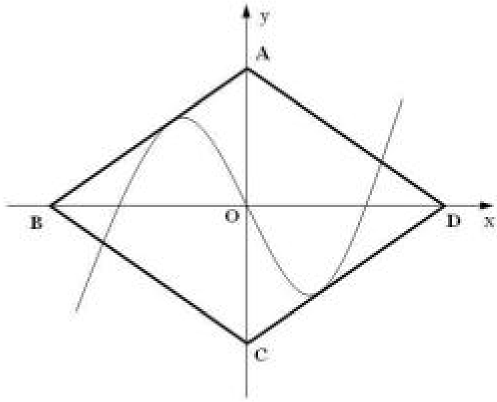
$\therefore f(x)=(x+1)^2+3$

또한 주어진 범위에서 최댓값은 $x=2$일 때 생기고, 그 최댓값은

$M=f(2)=9+3=12$

$\therefore a+M=6+12=18$

9. 그림과 같이 양수 a에 대하여 네 꼭짓점의 좌표가 $A(0, a)$, $B(-2a, 0)$, $C(0, -a)$, $D(2a, 0)$인 마름모 $ABCD$에 대하여 변 AB와 변 CD가 각각 삼차함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-x$의 그래프에 접할 때, 마름모 $ABCD$의 넓이는?



① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6

[정답] ②

[해설] 직선 AB와 CD의 기울기는 $\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$이다.

따라서 변 AB와 CD가 삼차함수에 접할 때의 x좌표는

삼차함수의 도함수의 값이 $\frac{1}{2}$이 될 때의 x값이 된다.

$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-1=\frac{1}{2}$에서 $\frac{3}{2}x^2=\frac{3}{2}$, $x^2=1$ $\therefore x=1, -1$

$x=1$일 때의 삼차함수의 함숫값은 $-\frac{1}{2}$이고,

직선 CD가 이 점 즉 점 $(1, -\frac{1}{2})$을 지나면서 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

직선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}x-1$

이 직선의 y절편 $-1=-a$인 것이므로, $a=1$

따라서 $\overline{AC}=2a=2$, $\overline{BD}=4a=4$이므로

마름모 $ABCD$의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BD}=4$

10. $x^3-2x^2-x+2 \geq 0$이 되기 위한 $x \geq a$는 필요조건이고 $x \geq b$는 충분조건일 때 a의 최댓값과 b의 최솟값의 합은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3

[정답] ③

[해설] $x^3-2x^2-x+2=x^2(x-2)-(x-2)=(x^2-1)(x-2)$

$=(x+1)(x-1)(x-2)$이므로,

$x^3-2x^2-x+2 \geq 0$인 x값의 범위는 $-1 \leq x \leq 1$, $x \geq 2$이다.

이 때 $x \geq a$가 $-1 \leq x \leq 1$, $x \geq 2$이기 위한 필요조건이려면

$x \geq a$가 $-1 \leq x \leq 1$, $x \geq 2$ 범위를 모두 포함하고 있어야 하므로

$a \leq -1$이다.

또 $x \geq b$가 $-1 \leq x \leq 1$, $x \geq 2$이기 위한 충분조건이려면

$x \geq b$가 $-1 \leq x \leq 1$, $x \geq 2$ 범위 내에 들어가 있어야 하므로

$b \geq 2$이다.

따라서 a의 최댓값은 -1이고 b의 최솟값은 2이므로 합은 1

11. 방정식 $\log_4(x+10)=\log_2(2x-1)$을 만족하는 x의 값은?

① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{4}$

[정답] ①

[해설] 진수 조건에 의해, $x+10>0$, $2x-1>0$ $\quad \therefore x>\frac{1}{2}$

또, $\log_2(2x-1)=\log_{2^2}(2x-1)^2=\log_4(4x^2-4x+1)$이므로

$\log_4(x+10)=\log_4(4x^2-4x+1)$에서

$x+10=4x^2-4x+1$, $4x^2-5x-9=0$

$(x+1)(4x-9)=0$ $\quad \therefore x=\frac{9}{4}$ $\left(\because x>\frac{1}{2}\right)$

12. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+x+b가 $(x-1)^2$으로 나누어 떨어질 때, $a-b$의 값은?

① -2 ② -6 ③ 2 ④ 6

[정답] ①

[해설] $x^3+ax^2+x+b=(x-1)^2Q(x)$로 두고, $x=1$을 대입하면

$a+b+2=0 \qquad \therefore b=-a-2$

이를 대입하면 좌변은 $x-1$로 인수분해가 된다. 즉

$x^3+ax^2+x-a-2=(x^3+x-2)+a(x^2-1)$

$=(x-1)(x^2+x+2)+a(x-1)(x+1)=(x-1)\{x^2+x+2+a(x+1)\}$

따라서 $(x-1)\{x^2+x+2+a(x+1)\}=(x-1)^2Q(x)$이므로,

양변을 $x-1$로 나누면

$x^2+x+2+a(x+1)=(x-1)Q(x)$

여기에 다시 $x=1$을 대입하면

$4+2a=0 \qquad \therefore a=-2,\ b=0$

$\therefore a-b=-2$

13. 행렬 $A=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 $A^{2014}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$일 때, $x+y$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4

[정답] ③

[해설] $A^2=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$

(또는 케일리−해밀턴의 정리에 의해 $A^2+A+E=O$,

$(A-E)(A^2+A+E)=O$, $A^3-E^3=O$으로부터 $A^3=E$를 얻을 수 있다)

따라서 $A^{2014}=A^{3\times 671+1}=(A^3)^{671}\cdot A=A=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$이고,

$A^{2014}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x-3y\\ x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$, 연립방정식을 풀면

$x=7$, $y=-5$를 얻는다. 따라서 $x+y=2$

(양변에 A^{-1}를 곱하여 계산할 수도 있다)

14. $9\times 11\times 101\times 10001$의 결과를 간단히 하면?

① 10^4+1 ② 10^4-1 ③ 10^8+1 ④ 10^8-1

[정답] ④

[해설] 보기에 10의 거듭제곱이 있는 것을 토대로 구하는 값들도 모두 10을 활용하여 표현하면

$(10-1)(10+1)(10^2+1)(10^4+1)=(10^2-1)(10^2+1)(10^4+1)$

$=(10^4-1)(10^4+1)=10^8-1$

15. 함수 $f(x)=2\cos\pi(x+1)+3$에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>
ㄱ. $f(5)=5$ ㄴ. $f(x)$의 최솟값은 -3이다.
ㄷ. 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-2)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ

[정답] ③

[해설] ㄱ. $f(5)=2\cos(6\pi)+3=2\cdot 1+3=5$ (참)

ㄴ. 최솟값은 cos값이 -1일 때이므로, $2\cdot(-1)+3=1$ (거짓)

ㄷ. 이 함수의 주기는 2π를 x의 계수인 π로 나눈 2이므로,

$f(x)=f(x-2)$가 성립한다. (참)

16. 이차함수 $f(x)$가 $f(x)=\frac{12}{7}x^2-2x\int_1^2 f(t)dt+\left\{\int_1^2 f(t)dt\right\}^2$일 때,

$\int_1^2 f(x)dx$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

[정답] ②

[해설] $\int_1^2 f(t)dt=k$ (k는 상수)라 하면 $f(x)=\frac{12}{7}x^2-2kx+k^2$이고,

$x=t$를 대입한 뒤 $\int_1^2 f(t)dt=k$에 대입하면

$\int_1^2 (\frac{12}{7}t^2-2kt+k^2)dt=k$,

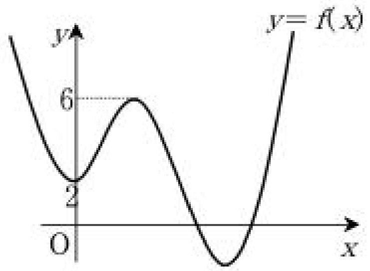
$\left[\frac{4}{7}t^3-kt^2+k^2t\right]_1^2=\frac{4}{7}(8-1)-k(4-1)+k^2(2-1)=k^2-3k+4=k$

$k^2-4k+4=(k-2)^2=0 \quad \therefore k=\int_1^2 f(x)dx=2$

17. 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때,

방정식 $\{f(x)\}^2=6f(x)$의 실근의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6



[정답] ③

[해설] $\{f(x)\}^2-6f(x)=0$에서 $f(x)\{f(x)-6\}=0 \quad \therefore f(x)=0$ 또는 6

그림에서 $f(x)=0$인 x값은 두 개, $f(x)=6$인 x값은 세 개 존재하므로

주어진 방정식의 실근의 개수는 5이다.

18. 세 집합 $P=\{a,b,c,d,e\}$, $A=\{a,b\}$, $B=\{b,c,d\}$에 대하여 $A\cup X=B\cup X$를 만족시키는 집합 P의 부분집합 X의 개수는?

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16

[정답] ②

[해설] $A\cup X=B\cup X$를 만족하려면 X는 A에만 있는 원소와 B에만 있는 원소, 즉 a,c,d를 반드시 원소로 가져야 한다.
만약 예를 들어 a를 원소로 갖지 않으면, 집합 $A\cup X$에는 a가 있지만 집합 $B\cup X$에는 a가 없게 되고, c,d에 대해서도 마찬가지이다.
한편 $A\cap B$의 원소인 b는 가질 필요가 없음에 주의해야 한다.
b는 A도 B도 가지고 있으므로, X가 b를 갖고 있지 않더라도 합집합의 연산을 하게 되면 $A\cup X$에서든 $B\cup X$에서든 b는 존재하게 되기 때문이다.
따라서, a,b,c,d,e 5개 원소 중 a,c,d 3개 원소를 반드시 포함하는 집합 X의 개수는 $2^{5-3}=2^2=4$

19. 자연수 n에 대하여 $f(n)=(\frac{1-i}{1+i})^n$으로 정의할 때, $f(2013)$의 값은?

(단, $i=\sqrt{-1}$)

① i ② $-i$ ③ 2013 ④ -2013

[정답] ②

[해설] $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i=i^3$이므로,

$$f(2013)=(\frac{1-i}{1+i})^{2013}=(i^3)^{2013}=i^{6039}=i^{4\times 1509+3}=i^3=-i$$

20. $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $a+\dfrac{1}{b}$의 값은?

① $3-\sqrt{2}$ ② $4-\sqrt{2}$ ③ $3+\sqrt{2}$ ④ $4+\sqrt{2}$

[정답] ④

[해설] $\sqrt{6+4\sqrt{2}}=\sqrt{6+2\cdot 2\sqrt{2}}=\sqrt{6+2\sqrt{8}}$

$=\sqrt{4+2+2\sqrt{4\times 2}}=\sqrt{(2+\sqrt{2})^2}=2+\sqrt{2}$

$1<\sqrt{2}<2$에서 $3<2+\sqrt{2}<4$이므로 정수 부분 $a=3$이고,

소수 부분 $b=(2+\sqrt{2})-3=\sqrt{2}-1$

$\therefore a+\dfrac{1}{b}=3+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=3+\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=3+\sqrt{2}+1=4+\sqrt{2}$