2023년도 6월 서울시 9급 수학 (유원지)

1. 부등식 $|x|+|x-2|\le 5$의 해가 $a\le x\le b$일 때, $a+b$의 값은?

[풀이] (i) $x\ge 2$인 경우, $x+x-2\le 5,\ 2x\le 7\quad \therefore x\le \frac{7}{2}$

(ii) $0\le x<2$인 경우, $x-x+2\le 5$

이 부등식은 x값에 관계없이 성립하므로 $0\le x<2$ 범위의 모든 x값이 부등식을 만족한다.

(iii) $x<0$인 경우, $-x-x+2\le 5,\ -2x\le 3\quad \therefore x\ge -\frac{3}{2}$

(i), (ii), (iii)으로부터 $-\frac{3}{2}\le x\le \frac{7}{2}\quad \therefore a=-\frac{3}{2},\ b=\frac{7}{2}$

$\therefore a+b=2$

2. 방정식 $(\log\sqrt{x})^2-\log x^2+3=0$의 서로 다른 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값은?

[풀이] $\log x=t$로 치환하면 $\log\sqrt{x}=\log x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log x$, $\log x^2=2\log x$이므로

주어진 식은 $(\frac{1}{2}\log x)^2-2\log x+3=0$, 즉 $\frac{1}{4}t^2-2t+3=0$

$t^2-8t+12=0,\ (t-2)(t-6)=0\quad \therefore t=2,\ 6$

즉 $\log x=2,\ 6$에서 $x=10^2,\ 10^6\quad \therefore \alpha\beta=10^8$

3. 주사위 한 개를 두 번 던져서 처음에 나온 눈의 수를 m, 나중에 나온 눈의 수를 n이라고 하자. $m+n$이 짝수일 때, m이 3의 배수일 확률은?

[풀이] $m+n$이 짝수이려면 주사위를 두 번 던져서 모두 홀수가 나오거나 모두 짝수가 나와야 한다.

홀수가 나올 확률과 짝수가 나올 확률은 모두 $\frac{1}{2}$이므로,

두 번 모두 홀수가 나올 확률과 짝수가 나올 확률은 모두 $\frac{1}{4}$이다.

따라서 $m+n$이 짝수일 확률은 $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

이 중 m이 3의 배수인 경우는 $(m,n)=(3,1),(3,3),(3,5),(6,2),(6,4),(6,6)$이므로

그 확률은 $\frac{1}{6}$이다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$

4. 양의 실수 x에 대하여 $x+\frac{2}{x}$는 $x=a$에서 최솟값 b를 가질 때, $\frac{b}{a}$의 값은?

[풀이] x와 $\frac{2}{x}$가 모두 양수이므로 산술기하평균의 성질을 사용할 수 있다.

$x+\frac{2}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} = 2\sqrt{2}$이므로 최솟값 $b=2\sqrt{2}$이고,

그 때의 x값은 $x=\frac{2}{x}$일 때이므로 $x^2=2$에서 $x=\sqrt{2}=a$ $\quad \therefore \frac{b}{a}=2$

5. 함수 $f(x)=\cos^2(x+\frac{\pi}{2})+4\cos x+5$가 $x=a$에서 최솟값 b를 가질 때, $\sin a+b$의 값은?

[풀이] $\cos(x+\frac{\pi}{2})=-\sin x$이므로, $f(x)=\sin^2 x+4\cos x+5$이다.

즉 $f(x)=1-\cos^2 x+4\cos x+5=-\cos^2 x+4\cos x+6$

$=-(\cos x-2)^2+10$

$-1 \leq cosx \leq 1$이므로, $f(x)$는 $\cos x=-1$ 즉 $x=\pi$일 때 최솟값 1을 갖는다.

$\therefore a=\pi,\ b=1$

$\therefore \sin a+b=0+1=1$

6. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 $S_n=n^2+1$을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{50} a_{2k-1}$의 값은?

[풀이] $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+1-\{(n-1)^2+1\}=n^2+1-(n^2-2n+2)=2n-1\ (n \geq 2)$,

$a_1=S_1=2$이므로 이는 $a_n=2n-1$에 $n=1$을 대입한 값보다 1이 크다.

따라서 주어진 합을 구함에 있어 우선 모든 n값에 대해 $a_n=2n-1$이라 두고 푼 다음,

최종 결과값에 1을 더하면 된다.

$a_n=2n-1$에서 $a_{2k-1}=2(2k-1)-1=4k-3$이므로

$$\sum_{k=1}^{50}(4k-3)=4\cdot\frac{50\cdot 51}{2}-3\cdot 50=4950$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{50} a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{50}(4k-3)+1=4951$$

7. 좌표평면 위에서 두 직선 $l_1 : x+y-2=0$, $l_2 : ax+by-1=0$의 교점이 $(1,1)$이며, 직선 l_1과 l_2가 이루는 각을 $\theta(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2})$라 할 때, $\cos\theta = \frac{1}{5\sqrt{2}}$이다. $|a-b|$의 값은?

[풀이] 두 직선의 교점이 $(1,1)$이므로 이를 l_2에 대입하면 $a+b-1=0 \quad \therefore a+b=1$

또, l_1의 기울기는 -1이고, l_2의 기울기는 $-\frac{a}{b}$이므로

두 직선이 이루는 예각 θ에 대해 $\tan\theta = \left|\frac{-1+\frac{a}{b}}{1+\frac{a}{b}}\right| = \left|\frac{a-b}{a+b}\right| = |a-b|$

결국 구하라는 값은 $\tan\theta$이며, $\cos\theta = \frac{1}{5\sqrt{2}}$에서 $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$이므로

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 7$

8. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+4n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+6n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n^2}}\right)$의 값은?

[풀이] (준식)$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\cdot\sqrt{1+\frac{2k}{n}}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2k}{n}}}\cdot\frac{2}{n}\right)$

여기에서 $1+\frac{2k}{n}$을 x로 치환하면 dx는 $\frac{2}{n}$이 되고, 적분구간은 1부터 3이 되므로

구하는 값은 $\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}[2\sqrt{x}]_1^3 = \frac{1}{2}(2\sqrt{3}-2) = \sqrt{3}-1$

9. 좌표평면 위의 두 점 $A(2,1)$, $B(4,2)$에 대해 선분 AB를 빗변으로 하는 직각삼각형의 넓이의 최댓값은?

[풀이] 나머지 한 꼭짓점을 C라 하면, 선분 AB를 빗변으로 하는 모든 직각삼각형에 대해 점 C의 집합은 선분 AB를 지름으로 하는 원이다. (중심각과 원주각의 성질)
그렇다면 넓이가 최대가 되려면 점 C가 선분 AB로부터 최대한 멀리 떨어져 있어야 하고, 그 점은 AB와 평행한 접선이 원에 접할 때의 접점이 되면 된다.

그 때 선분 AB와 점 C의 거리는 곧 원의 반지름이므로, $r = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{2^2+1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

따라서 삼각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot r = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{5}{4}$

10. 집합 $X=\{1,2,3,4,5\}$에 대하여 보기의 조건을 만족시키는 X에서 X로 가는 함수 f의 개수는?

(1) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이다. (2) $f(3) \ge 3$

[풀이] $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$라는 조건은 중복조합으로 처리할 수 있고,

$f(3) \ge 3$ 즉 $f(3)=3,4,5$이므로 이에 따라 경우를 나눈다.

(i) $f(3)=3$인 경우 : $f(1), f(2)$는 $1,2,3$이, $f(4), f(5)$는 $3,4,5$가 가능하므로

${}_3H_2 \cdot {}_3H_2 = {}_4C_2 \cdot {}_4C_2 = 36$

(ii) $f(3)=4$인 경우 : $f(1), f(2)$는 $1,2,3,4$가, $f(4), f(5)$는 $4,5$가 가능하므로

${}_4H_2 \cdot {}_2H_2 = {}_5C_2 \cdot {}_3C_2 = 30$

(iii) $f(3)=5$인 경우 : $f(1), f(2)$는 $1,2,3,4,5$가, $f(4), f(5)$는 5만 가능하므로

${}_5H_2 \cdot 1 = {}_6C_2 = 15$

(i), (ii), (iii)으로부터 함수 f의 개수는 $36+30+15=81$

11. 직선 $y=x+b$를 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 원 $(x-2)^2+y^2=1$과 접한다. 이때 b의 값이 될 수 있는 것은?

[풀이] 직선을 $y=x$에 대해 대칭이동하면 x, y가 서로 바뀌므로

$x=y+b \quad \therefore x-y-b=0$

이 직선이 원에 접한다면 직선과 원의 중심 사이의 거리가 원의 반지름과 같다.

직선과 원의 중심 $(2,0)$ 사이의 거리 $d=\dfrac{|2-b|}{\sqrt{2}}$이고, 원의 반지름 $r=1$이므로,

$\dfrac{|2-b|}{\sqrt{2}}=1$에서 $|2-b|=\sqrt{2}$, $\quad (b-2)^2=2$

$b^2-4b+2=0 \quad \therefore b=2\pm\sqrt{2}$ 문제의 보기 중에서는 ①이 이에 해당한다.

12. 다항식 $f(x)=x^4+ax^3+2ax+5$를 $x+1$로 나눈 나머지와 $f(x)$를 x^2+2로 나눈 나머지가 같을 때, 상수 a의 값은?

[풀이] $x+1$로 나눈 나머지는 인수정리에 의해 $f(-1)=1-a-2a+5=6-3a$

또한 $f(x)$를 직접 x^2+2로 나누면, $f(x)=(x^2+2)(x^2+ax-2)+9$이므로,

나머지가 9이다.

즉 $6-3a=9$에서 $a=-1$

13. 함수 $f(x)=(a+1)x^2+2(1-a)x+a-2$의 그래프가 a의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 P라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 y절편은?

[풀이] 주어진 식의 우변을 a에 대해 정리하면 $(x^2-2x+1)a+(x^2+2x-2)$

a의 값에 관계없이 특정한 점을 지나려면 a의 계수가 0이어야 하므로

$x^2-2x+1=(x-1)^2=0$에서 $x=1$

그 때의 y값인 $f(1)=1$이므로, 점 P의 좌표는 $(1,1)$

한편 $f'(x)=2(a+1)x+2(1-a)$이고, $f'(1)=4$이므로,

접선의 방정식은 $y=4(x-1)+1=4x-3$

따라서 접선의 y절편은 -3이다.

14. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)+x^2y+xy^2$, $f'(0)=1$을 만족할 때, $f(1)$의 값은?

[풀이] 조건식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면 $f(0)=2f(0)$으로부터 $f(0)=0$을 얻는다.

한편 $y=h$를 대입하고, 미분계수의 정의를 이용하면

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+x^2h+xh^2-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+x^2h+xh^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left(\frac{f(h)-f(0)}{h}+x^2+xh\right)\quad (\because f(0)=0)$$

$$=f'(0)+x^2=x^2+1$$

도함수를 얻었으므로 여기에 부정적분을 취하면

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x\quad (f(0)=0\text{이므로 상수항은 없음})$$

$$\therefore f(1)=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$$

15. 좌표공간의 두 점 $A(2,1,1)$, $B(3,2,2)$와 xy평면 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은?

[풀이] 두 점이 모두 xy평면에 대해 같은 쪽에 있으므로, 한 점을 이 평면에 대해 대칭이동한다.

A를 대칭이동하여 $A'(2,1,-1)$이라 하면, $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로,

$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}\geq\overline{A'B}=\sqrt{1^2+1^2+3^2}=\sqrt{11}$$

16. 함수 $f(x)=2x+\int_0^3 f(t^2)dt$에 대하여 $f(10)$의 값은?

[풀이] $\int_0^3 f(t^2)dt=k$라 하면 $f(x)=2x+k$에서 $f(t^2)=2t^2+k$

이를 $\int_0^3 f(t^2)dt=k$에 대입하면 $\int_0^3 f(t^2)dt=\int_0^3 (2t^2+k)dt=[\frac{2}{3}t^3+kt]_0^3=18+3k=k$

$\therefore k=-9$

즉 $f(x)=2x-9$이므로 $f(10)=11$

17. 두 곡선 $y=-x^2+4$와 $y=x^2-2x$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[풀이] 먼저 두 곡선의 교점을 구하면

$-x^2+4=x^2-2x$에서 $2x^2-2x-4=0$, $x^2-x-2=(x-2)(x+1)=0$ $\therefore x=-1, 2$

이 범위에서 $y=-x^2+4$가 $y=x^2-2x$보다 높이 있으므로, 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^2 \{(-x^2+4)-(x^2-2x)\}dx=\int_{-1}^2 (-2x^2+2x+4)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^2=(-\frac{16}{3}+4+8)-(\frac{2}{3}+1-4)=9$$

18. 삼차함수 $f(x)=\int_0^x (t^2-4t+a)dt$가 모든 실수 x에 대하여 항상 증가하는 함수가 되도록 하는 실수 a의 최솟값은?

[풀이] 양변을 미분하면 $f'(x)=x^2-4x+a$이고,

$f(x)$가 모든 실수 x에서 증가하려면 도함수가 항상 0보다 크거나 같아야 한다.

즉 $f'(x)$의 판별식 $\frac{D}{4}=4-a\le 0$에서 $a\ge 4$

따라서 실수 a의 최솟값은 4이다.

19. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 실근을 $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$라 할 때, $\frac{1}{\alpha}, a, \frac{1}{\beta}$이 이 순서로 등비수열을 이루고, $\alpha, 4b, \beta$가 이 순서로 등차수열을 이룬다. $\beta-\alpha$의 값은?

[풀이] 먼저 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$이고,

등비중항과 등차중항의 성질을 각각 이용하면

$\frac{1}{\alpha}, a, \frac{1}{\beta}$이 등비수열을 이루므로 $a^2=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{b}$

$\alpha, 4b, \beta$가 등차수열을 이루므로 $8b=\alpha+\beta=-a$

즉 $a=-8b$에서 $a^2=64b^2$이므로, $64b^2=\frac{1}{b}$에서 $b^3=\frac{1}{64}$ $\quad\therefore b=\frac{1}{4}, a=-2$

$\therefore \beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{a^2-4b}=\sqrt{3}$

20. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=1$, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=-3$을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은?

[풀이] $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=1$로부터 $f(x)$는 최고차항이 x^2인 이차식임을 알 수 있고,

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=-3$으로부터 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 가짐을 알 수 있다.

따라서 $f(x)=(x-1)(x-k)$라 놓으면

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-k)}{(x-1)(x+2)}=\frac{1-k}{3}=-3$에서

$1-k=-9 \quad \therefore k=10$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-10)$

$\therefore f(0)=10$