1. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3x^2}{x}=2$, $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{(x-1)f(x)}=1$을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은?

① $-2$ ② $-1$ ③ $1$ ④ $2$

[정답] ②

[해설] 첫 번째 조건식에서, 주어진 극한값이 $0$이 아닌 상수가 되려면,
분자와 분모의 차수가 같아야 한다.
따라서 $f(x)-3x^2$이 일차식이 돼야 하므로, $f(x)$의 이차항의 계수는 $3$이고,
분모의 일차항의 계수가 $1$이므로 분자의 일차항의 계수는 $2$여야 한다.
따라서 $f(x)=3x^2+2x+k$로 둘 수 있고, 두 번째 조건식에서

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{(x-1)f(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)f(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{f(x)}=\frac{4}{f(1)}=1 \quad \therefore f(1)=4$$

즉 $f(1)=3+2+k=4$로부터 $k=-1$

$\therefore f(x)=3x^2+2x-1$

$\therefore f(0)=-1$

2. $\frac{x-y}{2}=\frac{2x+y}{7}=k$와 $\frac{x^3-3y^2}{x+y}=1$을 만족하는 $k$값의 개수는?

① $1$ ② $2$ ③ $3$ ④ $4$

[정답] ②

[해설] 첫 번째 식으로부터 $x-y=2k$, $2x+y=7k$
두 식을 연립하여 풀면 $x=3k$, $y=k$
이를 두 번째 식에 대입하면

$$\frac{x^3-3y^2}{x+y}=\frac{(3k)^3-3\cdot k^2}{3k+k}=\frac{27k^3-3k^2}{4k}=1$$

즉 $27k^3-3k^2=4k$, $27k^3-3k^2-4k=0$

인수분해하면 $k(3k+1)(9k-4)=0$ $\therefore k=0,\ -\frac{1}{3},\ \frac{4}{9}$

그런데 $k=0$이면 $x=y=0$이 되어 두 번째 식의 분모가 $0$이 되어버리므로
가능한 $k$값은 $0$을 제외한 나머지 두 개다.

3. 정적분 $\int_0^1 xe^x dx$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$

[정답] ③

[해설] 부분적분법을 활용한다.

$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$이므로

$\int_0^1 xe^x dx = \left[xe^x - e^x\right]_0^1 = 1$

4. 한 개의 동전을 3번 던져서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 $X$라고 한다. 확률변수 $Y = aX + b$에 대하여 $E(Y) = 0$, $V(Y) = 3$을 만족시킬 때, $a + b$의 최댓값은? (단, $a$, $b$는 상수이고, $E(Y)$, $V(Y)$는 각각 $Y$의 평균과 분산이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

[정답] ①

[해설] $X$는 이항분포 $B(3, \frac{1}{2})$을 따르므로,

$E(X) = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $V(X) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$

이 때, $E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b = \frac{3}{2}a + b = 0$,

$V(Y) = V(aX + b) = a^2 V(X) = \frac{3}{4}a^2 = 3$

두 식을 연립하면

$a = 2$, $b = -3$ 또는 $a = -2$, $b = 3$

따라서 $a + b$의 최댓값은 1이다.

5. 함수 $f(x)=\begin{cases} -2x+a & (x \le 2) \\ \dfrac{x+b}{\sqrt{x+7}-3} & (x>2) \end{cases}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때,

$a+b$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8

[정답] ④

[해설] 실수 전체에서 연속이므로 $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$가 성립한다.

따라서 $\lim_{x\to 2}\dfrac{x+b}{\sqrt{x+7}-3}=-4+a$

좌변의 분모가 $x\to 2$일 때 $0$에 가까이 가므로 분자도 그래야 한다.

따라서 $2+b=0 \quad \therefore b=-2$

이를 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(\sqrt{x+7}+3)=6$$

즉 $-4+a=6 \quad \therefore a=10$

$\therefore a+b=8$

6. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 임의의 실수 $x$에 대하여

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{f(2x-2h)-f(2x+h)\}=4x^2-4x-5$를 만족시킬 때, $f'(1)$의 값은?

① $-6$ ② $-2$ ③ $2$ ④ $6$

[정답] ③

[해설] 주어진 식의 좌변을 변형하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{f(2x-2h)-f(2x+h)\}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2x-2h)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(2x+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2x-2h)-f(2x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(2x+h)-f(2x)}{h}$$

$$=(-2)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(2x-2h)-f(2x)}{-2h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(2x+h)-f(2x)}{h}$$

$=-2f'(2x)-f'(2x)=-3f'(2x)$ (미분계수의 정의)

즉 $-3f'(2x)=4x^2-4x-5$이고,

구하는 것은 $f'(1)$이므로 이는 $x=\frac{1}{2}$을 대입하여 얻을 수 있다.

구한 식에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면

$-3f'(1)=4\cdot\frac{1}{4}-4\cdot\frac{1}{2}-5=-6$

$\therefore f'(1)=2$

7. 이차방정식 $x^2+ax+3=0$의 두 근 $\alpha$, $\beta$가 $(\alpha^2-1)(\beta^2-1)=12$를 만족시킬 때, 양수 $a$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

[정답] ②

[해설] 근과 계수의 관계로부터 $\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=3$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=a^2-6$

이 때, $(\alpha^2-1)(\beta^2-1)=(\alpha\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)+1=9-(a^2-6)+1$

$=16-a^2=12$

$a^2=4 \quad \therefore a=2 \ (\because a>0)$

8. 모든 실수 $x$에 대하여 $(a-1)x^2+ax+a \le 0$을 만족하고 $x$에 대한 방정식 $x^2-ax+a^2-3=0$이 서로 다른 두 실근을 갖게 하는 정수 $a$의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

[정답] ②

[해설] $(a-1)x^2+ax+a \le 0$이 항상 성립하려면

이차항의 계수 $a-1<0$이어야 하고,

판별식 $D=a^2-4a(a-1) \le 0$이어야 한다. 이 부등식을 풀면

$-3a^2+4a \le 0,\ a(3a-4) \ge 0 \quad \therefore a \ge \frac{4}{3},\ a \le 0$

범위를 종합하면 $a \le 0$

한편, $x^2-ax+a^2-3=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

판별식 $D=a^2-4(a^2-3)>0$이어야 한다. 이 부등식을 풀면

$-3a^2+12>0,\ a^2-4<0 \quad \therefore -2<a<2$

두 부등식의 공통 부분은 $-2<a \le 0$

따라서 정수 $a$는 $-1$, $0$의 2개다.

9. 곡선 $y=-x^2+4x$와 직선 $y=2x$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{2}{3}$ ② $1$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$

[정답] ③

[해설] 두 그래프의 교점은 $-x^2+4x=2x$로부터 $x^2-2x=0$ $\therefore x=0,\ 2$

또한, 두 그래프 모두 점 $(2, 4)$를 지나고, $0 \le x \le 2$ 범위에서는 이차함수가 직선보다 위에 위치해 있으므로, 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^2 \{(-x^2+4x)-2x\}dx = \int_0^2 (-x^2+2x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

10. 양수 $a$에 대하여 곡선 $y=x^3-2x^2+a$에 접하고 직선 $y=4x+1$에 평행인 직선의 방정식이 $y=mx+3a$일 때, $\frac{5m}{a}$의 값은? (단, $m$은 상수)

① $3$ ② $9$ ③ $27$ ④ $81$

[정답] ③

[해설] $f(x)=x^3-2x^2+a$라고 두고, 접선의 접점을 $(t, f(t))$라 하면

접선의 기울기 $f'(t)=4$가 되므로, 일단 $m$값도 $4$가 되고,

$f'(t)=3t^2-4t=4$에서 $(t-2)(3t+2)=0$ $\therefore t=2$ 또는 $-\frac{2}{3}$

$t=2$이면 접점의 좌표는 $(2, a)$이므로 접선의 방정식은

$y=4(x-2)+a=4x+a-8$

이것이 $y=mx+3a$와 같으므로 $3a=a-8$에서 $a=-4$

이는 $a$가 양수라는 전제에 모순이다.

한편 $t=-\frac{2}{3}$이면 접점의 좌표는 $(-\frac{2}{3}, a-\frac{32}{27})$이므로 접선의 방정식은

$y=4(x+\frac{2}{3})+a-\frac{32}{27}=4x+a+\frac{40}{27}$

이것이 $y=mx+3a$와 같으므로 $3a=a+\frac{40}{27}$에서 $a=\frac{20}{27}$

$\therefore \frac{5m}{a}=20 \div \frac{20}{27}=27$

11. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $\sin^2 x = \cos^2 x - \cos x$의 모든 해의 합은?

① $2\pi$ ② $\frac{5}{2}\pi$ ③ $3\pi$ ④ $\frac{7}{2}\pi$

[정답] ①

[해설] $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$이므로

$1 - \cos^2 x = \cos^2 x - \cos x, \quad 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

$(\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 0 \qquad \therefore \cos x = 1$ 또는 $-\frac{1}{2}$

$\cos x = 1$일 때, $x = 0$이고, $\cos x = -\frac{1}{2}$일 때, $x = \frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$이므로,

모든 해의 합은 $2\pi$이다.

12. 같은 종류의 구슬 10개를 같은 종류의 유리병 5개에 나누어 넣을 때, 빈 유리병이 없도록 넣는 경우의 수는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8

[정답] ③

[해설] 구슬과 유리병이 모두 구별되지 않으므로,

이 문제는 10을 다섯 개의 자연수로 분할하는 문제와 같다.

$$\begin{aligned} 10 &= 6+1+1+1+1 = 5+2+1+1+1 \\ &= 4+3+1+1+1 = 4+2+2+1+1 \\ &= 3+3+2+1+1 = 3+2+2+2+1 = 2+2+2+2+2 \end{aligned}$$

이상 총 7가지 경우가 있다.

13. 수직선 위를 움직이는 점 $P$의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)=2t-4$이다. 점 $P$가 시각 $t=2$에서 $t=k(k>2)$까지 움직인 거리가 $49$일 때, 상수 $k$의 값은?

① $6$ ② $7$ ③ $8$ ④ $9$

[정답] ④

[해설] 속도를 적분하면 이동거리가 나오므로

$$\int_{2}^{k}(2t-4)dt=\left[t^2-4t\right]_2^k=k^2-4k+4=49$$

$k^2-4k-45=0$, $(k-9)(k+5)=0$ $\therefore k=9$ ($\because k>2$)

14. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+9x+1$이 $x=\alpha$와 $x=\alpha+2(\alpha>0)$에서 극값을 가질 때, $\alpha$의 값은?

① $-6$ ② $-3$ ③ $2$ ④ $4$

[정답] ①

[해설] $f'(x)=3x^2+2ax+9=0$의 두 근이 $\alpha$와 $\alpha+2$인 것이므로

근과 계수의 관계에 의해, $\alpha(\alpha+2)=\dfrac{9}{3}=3$

$\alpha^2+2\alpha-3=0$, $(\alpha+3)(\alpha-1)=0$ $\therefore \alpha=1$ ($\because \alpha>0$)

따라서 두 근의 합 $-\dfrac{2}{3}a=1+3=4$이므로 $a=-6$

15. 방정식 $x^4+3x^3+9x^2+11x+12=0$의 근 중 하나가 $\dfrac{-1+\sqrt{15}\,i}{2}$일 때,

이 방정식의 근이 되는 것은?

① $-1+\sqrt{2}\,i$ ② $1-\sqrt{2}\,i$ ③ $-1+\sqrt{3}\,i$ ④ $1-\sqrt{3}\,i$

[정답] ①

[해설] 한 근이 $\dfrac{-1+\sqrt{15}\,i}{2}$이므로, $x=\dfrac{-1+\sqrt{15}\,i}{2}$로 두고 양변에 2를 곱하면

$2x=-1+\sqrt{15}\,i,\quad 2x+1=\sqrt{15}\,i$

양변을 제곱하면

$4x^2+4x+1=-15,\quad 4x^2+4x+16=0 \qquad \therefore x^2+x+4=0$

따라서 방정식의 좌변은 $x^2+x+4$를 인수로 가지므로, 나눗셈해 보면,

$x^4+3x^3+9x^2+11x+12=(x^2+x+4)(x^2+2x+3)$

즉 이 방정식의 네 근 중 두 근은 $x^2+2x+3=0$의 근이고,

근의 공식을 이용하면 $x=-1\pm\sqrt{2}\,i$이다.

16. 전체집합 $U$의 두 부분집합 $A$, $B$에 대하여 $A=\{4x, x+1\}$, $B=\{2, x^2-5\}$,

$\{(A\cap B)^C\cap(B-A)\}=\{2\}$일 때, 집합 $A\cap B$의 원소가 될 수 없는 것은?

(단, $A^C$는 $A$의 여집합)

① $-8$ ② $-1$ ③ $4$ ④ $20$

[정답] ①

[해설] $\{(A\cap B)^C\cap(B-A)\}=(B-A)-(A\cap B)=B-A$

($\because$ $B-A$ 자체가 $A\cap B$ 영역을 하나도 포함하지 않기 때문)

즉 $B-A=\{2\}$이므로, $A\cap B=\{x^2-5\}$이어야 한다.

여기서 경우를 나눠 생각해보면,

$(i)\,4x=x^2-5$ : $x^2-4x-5=0$에서 $(x-5)(x+1)=0 \quad \therefore x=5,\ -1$

$x=5$이면 $A\cap B=\{20\}$, $x=-1$이면 $A\cap B=\{-4\}$이다.

$(ii)\,x+1=x^2-5$ : $x^2-x-6=0$에서 $(x-3)(x+2)=0 \quad \therefore x=3,\ -2$

$x=3$이면 $A\cap B=\{4\}$, $x=-2$이면 $A\cap B=\{-1\}$이다.

17. 직선 $y=x+a$가 원 $x^2+y^2-2x+4y+3=0$과 두 점에서 만나고

직선 $y=x+a$와 점 $(1,-1)$과의 거리가 $\sqrt{2}$보다 클 때, 가능한 $a$의 값은?

① $-6$ ② $-\frac{11}{2}$ ③ $-5$ ④ $-\frac{9}{2}$

[정답] ④

[해설] 원의 방정식을 표준형으로 바꾸면 $(x-1)^2+(y+2)^2=2$

직선 $y=x+a$, 즉 $x-y+a=0$이 원과 두 점에서 만나므로

직선과 원의 중심 $(1,-2)$ 사이의 거리가 원의 반지름보다 작다.

즉 $d=\frac{|1-(-2)+a|}{\sqrt{2}}=\frac{|3+a|}{\sqrt{2}}<\sqrt{2}$ $\quad\therefore |3+a|<2$

$-2<3+a<2$ $\quad\therefore -5<a<-1$

한편, $x-y+a=0$과 점 $(1,-1)$ 사이의 거리는 $\sqrt{2}$보다 크므로

$d=\frac{|1-(-1)+a|}{\sqrt{2}}=\frac{|2+a|}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$ $\quad\therefore |2+a|>2$

$2+a>2$ or $2+a<-2$ $\quad\therefore a>0$ or $a<-4$

공통 범위는 $-5<a<-4$이므로, 보기 중 가능한 $a$의 값은 $-\frac{9}{2}$뿐이다.

18. 좌표평면에서 두 직선 $x+1=\frac{y-2}{3}$와 $\frac{x-1}{2}=y+5$가 이루는 예각의 크기를

$\theta$라 할 때, $\cos^2\theta$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $1$

[정답] ②

[해설] 직선 $x+1=\frac{y-2}{3}$의 방향벡터 $\vec{u}=(1,3)$,

직선 $\frac{x-1}{2}=y+5$의 방향벡터 $\vec{v}=(2,1)$이므로,

$\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{|1\cdot 2+3\cdot 1|}{\sqrt{1^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad\therefore \cos^2\theta=\frac{1}{2}$

19. $25^x=9$, $\sqrt{10^y}=3$, $(\frac{16}{9})^z=9$를 만족시키는 세 실수 $x$, $y$, $z$에 대하여

$\frac{2}{x}-\frac{4}{y}+\frac{1}{z}$의 값은?

① $-2$ ② $-1$ ③ $1$ ④ $2$

[정답] ②

[해설] $25^x=9$에서 $25=9^{\frac{1}{x}}=(3^2)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{2}{x}}$

$\sqrt{10^y}=10^{\frac{y}{2}}=3$에서 $10^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{y}}$ $\therefore 3^{\frac{4}{y}}=(10^{\frac{1}{2}})^4=10^2=100$

$(\frac{16}{9})^z=9$에서 $\frac{16}{9}=(\frac{4}{3})^2=9^{\frac{1}{z}}=(3^2)^{\frac{1}{z}}=(3^{\frac{1}{z}})^2$ $\therefore 3^{\frac{1}{z}}=\frac{4}{3}$

$\therefore 3^{\frac{2}{x}-\frac{4}{y}+\frac{1}{z}}=3^{\frac{2}{x}}\div 3^{\frac{4}{y}}\times 3^{\frac{1}{z}}=25\div 100\times\frac{4}{3}=\frac{1}{3}=3^{-1}$

$\therefore \frac{2}{x}-\frac{4}{y}+\frac{1}{z}=-1$

20. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_3+a_5=111$, $a_2+a_4+a_6=102$일 때,

등차수열 $\{a_n\}$이 제$k$항부터 처음으로 음이 된다고 한다. 이때 $k$의 값은?

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16

[정답] ④

[해설] 등차수열의 성질에 의해

$3a_3=111$, $3a_4=102$ $\therefore a_3=37$, $a_4=34$

즉, 수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d$라 하면 $d=a_4-a_3=-3$

따라서 $a_1=a_3-2d=43$이므로, $a_n=-3n+46$

$k$항부터 음수가 된다고 하면 $a_k<0$에서

$-3k+46<0$, $3k>46$ $\therefore k>\frac{46}{3}=15.333...$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 제16항에서 처음으로 음수가 된다.