1. [정답] ②

$x+y+z=4$로부터 $x+y=4-z$, $y+z=4-x$, $z+x=4-y$이므로

$$\begin{aligned}(x+y)(y+z)(z+x)&=(4-x)(4-y)(4-z)\\&=64-16(x+y+z)+4(xy+yz+zx)-xyz\\&=64-16\cdot4+4\cdot(-14)-(-12)=-44\end{aligned}$$

2. [정답] ④

근과 계수의 관계로부터 $\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=5$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=5^2-2\cdot5=15$

또한, $x^2-5x+5=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2-5\alpha+5=0$, $\beta^2-5\beta+5=0$

따라서 $\alpha^2=5\alpha-5$, $\beta^2=5\beta-5$이므로

$\alpha^3=\alpha^2\alpha=(5\alpha-5)\alpha=5\alpha^2-5\alpha$, $\beta^3=5\beta^2-5\beta$

$\therefore 5\alpha^2-\alpha^3=5\alpha^2-(5\alpha^2-5\alpha)=5\alpha$, $5\beta^2-\beta^3=5\beta$

$$\begin{aligned}\therefore (5\alpha^2-\alpha^3-\beta)(5\beta^2-\beta^3-\alpha)&=(5\alpha-\beta)(5\beta-\alpha)\\&=26\alpha\beta-5(\alpha^2+\beta^2)\\&=26\cdot5-5\cdot15=55\end{aligned}$$

3. [정답] ①

$(2x+1)^6=(4x^2-1)Q(x)+ax+b$라고 두고,

양변에 $x=\dfrac{1}{2}$을 대입하면 $\quad 2^6=\dfrac{1}{2}a+b$

또, 양변에 $x=-\dfrac{1}{2}$을 대입하면 $\quad 0=-\dfrac{1}{2}+b$

두 식을 변끼리 더하면

$2b=2^6=64 \qquad \therefore b=32$, $a=64$

$\therefore R(x)=64x+32$

$\therefore R(-1)=-64+32=-32$

4. [정답] ③

$x^2+y^2=25$에서 $y^2=25-x^2$

$\therefore y^2+4x=-x^2+4x+25=-(x-2)^2+29$

한편, $x^2\geq 0$이고, $y^2=25-x^2\geq 0$이므로 $x^2\leq 25$

즉 $0\leq x^2\leq 25$이므로 $-5\leq x\leq 5$

이 범위에서 $-(x-2)^2+29$의 최댓값은 $x=2$일 때 29,

최솟값은 $x=-5$일 때 -20이므로

최댓값과 최솟값의 합은 9이다.

5. [정답] ②

두 점이 모두 직선 $y=x$에 대해 같은 방향에 있으므로

(모두 $y=x$의 윗부분에 있다)

두 점 중 하나를 $y=x$에 대해 대칭이동시킨 뒤

이동시키지 않은 점과 이동시킨 점의 직선거리를 구하면 최단거리이다.

여기서는 점 B를 대칭이동해 보자. 이동시키면 $B'(4,2)$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}\geq\overline{AB'}=\sqrt{7^2+1^2}=5\sqrt{2}$

6. [정답] ③

$\{f(x)-a\}\{f(x)-(a+2)\}=0$에서 $f(x)=a$ 또는 $f(x)=a+2$

한편, $f(x)=-x^2+2x+7=-(x-1)^2+8$이므로

그래프로 생각하면 구하는 것은 위로 볼록한 포물선과

두 직선 $y=a$, $y=a+2$의 교점의 x좌표이며,

서로 다른 세 실근을 가진다고 했으므로 두 직선 중 하나는 포물선과 서로 다른 두 점에서 만나고, 다른 하나는 포물선과 접해야 한다.

위치 관계를 생각하면 더 높이 있는 $y=a+2$가 포물선에 접하면 되므로

꼭짓점의 y좌표가 8임을 고려하면,

$a+2=8\quad\therefore a=6$

7. [정답] ①

원의 중심의 좌표가 $(0, a)$ **이므로**

원점에서 그은 두 접선이 수직이라면 오른쪽 그림과 같이 된다.

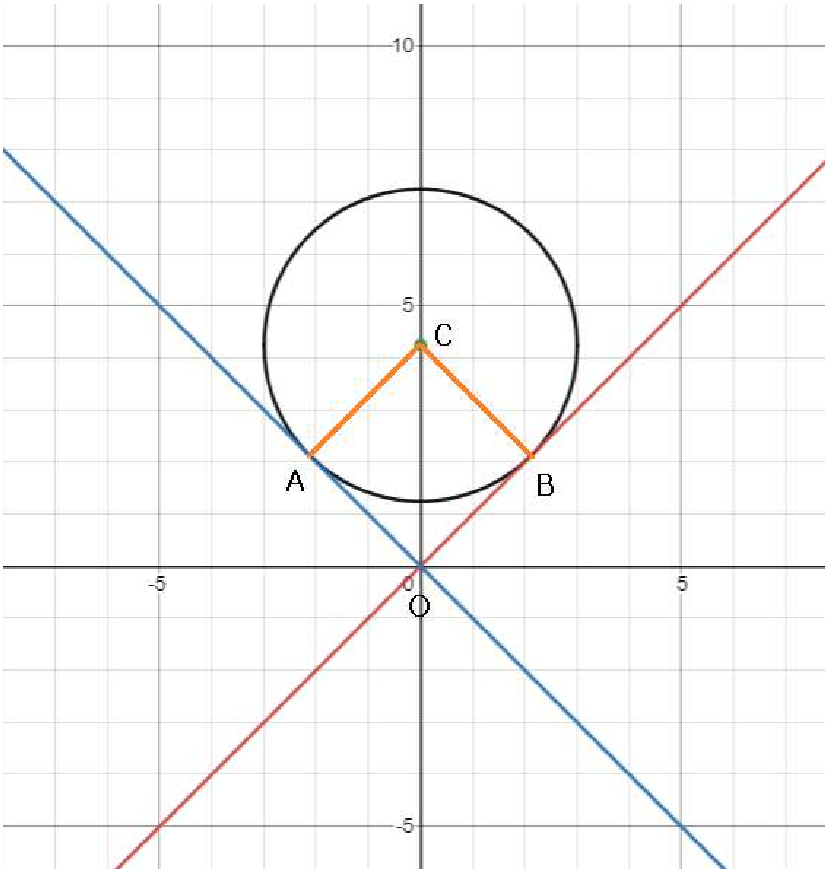
한편, 접선이 수직이라는 가정과 원의 접선의 성질에 의해

$\angle AOB$, $\angle CAO$, $\angle CBO$ **모두** 90° **이고,**

$\overline{AC} = \overline{BC}$ **이므로**

$\square AOBC$**는 정사각형이다.**

따라서



$\overline{OC} = a = \sqrt{2} \cdot \overline{AC} = 3\sqrt{2}$

8. [정답] ②

우변을 전개하면 $a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \ldots + a_{16} x^{15}$

이제 주어진 항등식에 $x = 1$**을 대입하면**

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{15} + a_{16} = 3^5 = 243 \cdots ①$

또, $x = -1$**을 대입하면**

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{15} - a_{16} = (-1)^5 = -1 \cdots ②$

①$-$②**하면**

$2(a_2 + a_4 + \ldots + a_{16}) = 244$

$$\therefore a_2 + a_4 + \ldots + a_{16} = \sum_{n=1}^{8} a_{2n} = 122$$

9. [정답] ②

유리함수의 점근선이 $x=7,\ y=2$라는 것이다.

분모에 $x=7$을 대입했을 때 0이 나와야 하므로 $b=7$

또, $y=\dfrac{ax+1}{-x+7}=\dfrac{-ax-1}{x-7}=\dfrac{-a(x-7)-7a-1}{x-7}=\dfrac{-7a-1}{x-7}-a$**이므로**

$-a=2 \quad \therefore a=-2$

$\therefore a+b=5$

10. [정답] ④

직선과 곡선이 접하므로, 연립한 뒤 (판별식)$=0$으로 둔다.

$mx+n=x^2+2ax+a^2+2a$**에서**

$x^2+(2a-m)x+(a^2+2a-n)=0$

$$D=(2a-m)^2-4(a^2+2a-n)=4a^2-4am+m^2-4a^2-8a+4n$$
$$=-4a(m+2)+(m^2+4n)=0$$

이 식이 a값에 관계없이 성립하므로

$m+2=0,\ m^2+4n=0 \quad \therefore m=-2,\ n=-1$

따라서 직선의 방정식은 $y=-2x-1$ 즉 $2x+y+1=0$이므로

이것과 점 $(8,3)$ 사이의 거리는 $\dfrac{|2\cdot8+3+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{20}{\sqrt{5}}=4\sqrt{5}$

11. [정답] ④

주어진 극한은 $x\to2$일 때 분모가 0으로 수렴하므로 분자도 0으로 수렴한다.

즉 $\sqrt{4\cdot2+a}-\sqrt{2+7}=\sqrt{8+a}-3=0 \quad \therefore a=1$

이 때

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+7}}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{4x+1})^2-(\sqrt{x+7})^2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+7})}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{3x-6}{(x-2)(x+2)(\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+7})}=\lim_{x\to2}\frac{3}{(x+2)(\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+7})}$$

$$=\frac{3}{4\cdot6}=\frac{1}{8}=b \quad \therefore \frac{a}{b}=8$$

12. [정답] ①

$f(0)=a+2$,

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\left(\frac{3x^2}{x-2x}+3\right)=\lim_{x\to0+}(-3x+3)=3,$$

$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}\left(\frac{3x^2}{x+2x}+3\right)=\lim_{x\to0+}(x+3)=3$$

즉 $\lim_{x\to0}f(x)=3$이므로

$a+2=3 \quad \therefore a=1$

13. [정답] ②

주어진 극한은 $x\to3$일 때 분모가 0으로 수렴하므로 분자도 0으로 수렴한다.

즉 $f(3)=2$이고,

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-2}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\left(\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\cdot\frac{1}{x+3}\right)=f'(3)\cdot\frac{1}{6}=2$$이므로

$f'(3)=12$

이 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, f(3))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(3)(x-3)+f(3)=12(x-3)+2=12x-34$

14. [정답] ③

두 점의 위치의 차이 $x_1-x_2=2t^3-9t^2-24t=f(t)$라 하면,

거리가 최대이면 되므로 주어진 범위에서 $f(t)$의 절댓값이 최대가 되면 된다.

($f(t)$가 양수이면 x_1이 오른쪽에, 음수이면 x_2가 오른쪽에 있는 것)

$f'(t)=6t^2-18t-24=6(t+1)(t-4)$이므로

$y=f(t)$는 $t=-1$에서 극대, $t=4$에서 극소,

따라서 $0\le t\le 5$ 범위에서는 $t=4$일 때 $f(t)$값이 최소이며

이 값의 절댓값이 정답

$\therefore |f(4)|=|2\cdot64-9\cdot16-24\cdot4|=112$

15. [정답] ④

주어진 항등식에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=2f(0)-1 \qquad \therefore f(0)=1$

한편 도함수의 정의로부터

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-1-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2xh-1}{h} \qquad (\because f(0)=1)$$

$$=2x+\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=2x+f'(0)$$

이 식의 양변에 부정적분을 취하면

$f(x)=x^2+f'(0)x+1 \qquad (\because f(0)=1)$

한편 주어진 두 번째 식에서 $x\to2$일 때 분모가 0으로 수렴하므로

분자도 0으로 수렴, 즉 $f(2)=f'(2)$

따라서 $f'(x)=2x+f'(0)$과 $f(x)=x^2+f'(0)x+1$에 $x=2$를 대입하면

$f'(2)=4+f'(0),\ f(2)=4+2f'(0)+1$

두 식의 값이 같으므로

$4+f'(0)=4+2f'(0)+1 \qquad \therefore f'(0)=-1$

즉 $f'(x)=2x-1$이므로 $\quad f'(2)=3$

16. [정답] ②

주어진 식의 양변을 미분하면

$xf'(x)=2x^3-2x^2-4x \qquad \therefore f'(x)=2x^2-2x-4=2(x-2)(x+1)$

따라서 극값을 갖는 두 지점 $\alpha=-1,\ \beta=2$

한편 $f(0)=1$을 이용하면 $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-x^2-4x+1$로 구할 수 있으므로

$$\int_0^{\beta}f(x)dx=\int_0^{2}\left(\frac{2}{3}x^3-x^2-4x+1\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{3}x^3-2x^2+x\right]_0^2=\frac{8}{3}-\frac{8}{3}-8+2=-6$$

17. [정답] ③

$y=2x^2-2=2(x^2-1)$은 구간 $(-1,1)$에서 0보다 작고,

$y=-x^2+1$도 구간 $(1,\infty)$에서 0보다 작으므로

$$\int_{-1}^{3}|f(x)|dx=-\int_{-1}^{3}f(x)dx=-\int_{-1}^{1}(2x^2-2)dx-\int_{1}^{3}(-x^2+1)dx$$

$$=-4\int_{0}^{1}(x^2-1)dx+\int_{1}^{3}(x^2-1)dx$$

$$=-4\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^3$$

$$=-4\cdot(-\frac{2}{3})+6-(-\frac{2}{3})=\frac{28}{3}$$

18. [정답] ①

주어진 조건을 해석하면, 원소 1은 무조건 A에 포함되어 있는 상황에서,

나머지 5개의 서로 다른 원소 2부터 6은

집합 A와 B 중 어느 한 곳만을 반드시 선택하여야 한다.

따라서 5개의 원소가 각각 선택할 수 있는 것이 A, B 2가지이고,

여기서 5개 원소 모두 집합 A를 택하는 경우(=B가 공집합)는 제외해야 하므로

구하는 순서쌍의 개수는 $2^5-1=31$

19. [정답] ③

모든 경우의 수는 $5\cdot5=25$,

두 눈의 수의 합이 3의 배수인 경우는 $(1,2),(2,1),(2,4),(3,3),(4,2),$

$(3,6),(6,3),(6,6)$의 8가지이므로 구하는 확률은 $\frac{8}{25}$

20. [정답] ④

확률변수 X는 이항분포 $B(750,\frac{1}{2})$을 따르므로

$E(X)=a=750\cdot\frac{1}{2}=375$, $V(X)=b=750\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{375}{2}$ $\quad\therefore a+2b=750$