2021년 제1차 경찰공무원(순경) 수학 해설

01. ①	02. ④	03. ①	04. ③	05. ②	06. ④	07. ④	08. ①	09. ④	10. ④
11. ②	12. ①	13. ②	14. ③	15. ②	16. ③	17. ③	18. ②	19. ②	20. ④

1.【정답】①

등식의 양변에 $x=0$ 대입 : $4=2b$, $b=2$

등식의 양변에 $x=1$ 대입 : $a+6=-c$

등식의 양변에 $x=2$ 대입 : $2a+12=2$, $a=-5$

$a+6=-c$에서 $c=-1$

$abc=(-5)\cdot 2\cdot(-1)=10$

2.【정답】④

$2021=k$라 하면

$2021^4-1=k^4-1=(k-1)(k+1)(k^2+1)$

$2020\times 2021^2+2020=k^2(k-1)+k-1=(k-1)(k^2+1)$

따라서 $(k-1)(k+1)(k^2+1)$을 $(k-1)(k^2+1)$로 나누었을 때 몫은 $k+1=2022$이다.

3.【정답】①

먼저 판별식 $D=6^2-4\cdot 1\cdot 1=32>0$이므로 서로 다른 두 실근을 가지며

$\alpha+\beta=6>0$, $\alpha\beta=1>0$이므로 두 근은 모두 양수이다.

$x^2-6x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$1-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}=0$, $1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{4}{x}$

$1-\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=\frac{4}{\alpha}$, $1-\frac{2}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{4}{\beta}$

$$\sqrt{1-\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}}=\sqrt{\frac{4}{\alpha}}+\sqrt{\frac{4}{\beta}}=\frac{2}{\sqrt{\alpha}}+\frac{2}{\sqrt{\beta}}=\frac{2(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$\alpha+\beta=(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2-2\sqrt{\alpha\beta}$이므로

$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}}=\sqrt{6+2}=2\sqrt{2}$

$\frac{2(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{2\cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{1}}=4\sqrt{2}$

4.【정답】③

함수 $y=xf(x)$는 $x=0$에서 x축과 만나므로 함수 $y=xf(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수가 2 이상이 되려면 이차방정식 $f(x)=0$이 중근 또는 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.($D\geq 0$)

$D=2^2-4\cdot 1\cdot k\geq 0,\ k\leq 1$

따라서 실수 k의 최댓값은 1이다.

5.【정답】②

$2\overline{\mathrm{AP}}=a\overline{\mathrm{PB}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=a:2$

$\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(3, 4)$를 $a:2$로 내분하는 P는

$\mathrm{P}\left(\dfrac{3a+2a}{a+2}, \dfrac{4a+2b}{a+2}\right)=\mathrm{P}(1, 0)$, $4a=2$, $a=\dfrac{1}{2}$, $4a+2b=0$, $b=-1$

$ab=\dfrac{1}{2}\cdot(-1)=-\dfrac{1}{2}$

6.【정답】④

직선 $x-y+3=0$과 원점 $(0, 0)$사이의 거리 $d=\dfrac{|3|}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

따라서 삼각형의 밑변 $2\sqrt{5^2-\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}=2\sqrt{25-\dfrac{9}{2}}=2\sqrt{\dfrac{41}{2}}$

삼각형의 넓이 $\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{\dfrac{41}{2}}\times\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{41}}{2}$

7.【정답】④

$x-1\rightarrow x+2$: x축으로 -3만큼 이동

$y+1\rightarrow y-2$: y축 3만큼 이동

따라서 원의 중심은 $(3-3, 4+3)=(0, 7)$이다.

직선 $x-y+3=0$과 $(6, 1)$사이의 거리 $d=\dfrac{|0-7+3|}{\sqrt{2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

8.【정답】①

$f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}=\dfrac{2(x+3)-7}{x+3}=\dfrac{-7}{x+3}+2$

유리함수 $f(x)$는 y축과 $\left(0, \dfrac{-7}{0+3}+2\right)=\left(0, -\dfrac{1}{3}\right)$에서 만나므로 ($y$절편)

무리함수 $g(x)=-\sqrt{x}+k$과 한 점에서 만나면서 실수 k의 값이 최소일때는

유리함수 $f(x)$의 y절편을 지날 때이므로 실수 k의 최솟값은 $k=-\frac{1}{3}$이다.

9. **【정답】** ④

$$\alpha_n^2+\beta_n^2=\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{2021}\left(\alpha_n^2+\beta_n^2\right)=\sum_{n=1}^{2021}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2021}-\frac{1}{2022}=\frac{2021}{2022}$$

10. **【정답】** ④

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2(n+1)}{n}$이므로

$$\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{2\cdot 2}{1}\times\frac{2\cdot 3}{2}\times\cdots\times\frac{2n}{n-1}=2^{n-1}n$$

$a_n=2^{n-1}n$

$a_1=1$, $a_2=4$, $a_3=12$, $a_4=32$, $a_5=80$

$S_5=1+4+12+32+80=129$이므로 S_5를 10으로 나눈 나머지는 9이다.

11. **【정답】** ②

$2^x=100^z$에서 $100^{\frac{z}{x}}=2$

$5^y=100^z$에서 $100^{\frac{z}{y}}=5$

$100^{\frac{z}{x}+\frac{z}{y}}=2\cdot 5=10=100^{\frac{1}{2}}$

$\frac{z}{x}+\frac{z}{y}=\frac{1}{2}$

12. **【정답】** ①

$$f(x)=\frac{x^2+x-6}{|x-2|}=\frac{(x+3)(x-2)}{|x-2|}$$

$a=\lim_{x\to 2+0}f(x)=2+3=5$, $b=\lim_{x\to 2-0}f(x)=-(2+3)=-5$

$ab=5\cdot(-5)=-25$

13. 【정답】 ②

$g(x)=(x^2-9)f(x)$라 하면

$g'(x)=2xf(x)+(x^2-9)f'(x)$

$g'(3)=6f(3)=6\cdot 5=30$

14. 【정답】 ③

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로

$\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x+a}{x-3}=b$이다.

$3^2-3+a=0$, $a=-6$

$\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}\lim_{x\to 3}(x+2)=5$, $b=5$

$a+b=-6+5=-1$

15. 【정답】 ②

곡선 $y=x^2-2x+3$위의 임의의 점을 $(k,\ k^2-2k+3)$이라하면

점 $(k,\ k^2-2k+3)$과 직선 $4x-y-7=0$ 사이의 거리는

$d=\frac{|4k-k^2+2k-3-7|}{\sqrt{17}}=\frac{|-k^2+6k-10|}{\sqrt{17}}=\frac{|-(k-3)^2-1|}{\sqrt{17}}$

따라서 $k=3$일 때 $d=\frac{1}{\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{17}}{17}$로 최단거리가 된다.

16. 【정답】 ③

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으므로 $f'(x)$는 서로 다른 두 실근 또는 중근을 가져야 한다.

$f'(x)=3x^2-6ax+b$

$\frac{D}{4}=(3a)^2-3\cdot b\geq 0$, $b\leq 3a^2$

$f(1)=\left[t^3-3at^2+bt\right]_0^1=1-3a+b=-3a+b+1$

$b\leq 3a^2$에서 $f(1)=-3a+b+1\leq 3a^2-3a+1$

$3a^2-3a+1=3\left(a^2-a+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}=3\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

따라서 $f(1)$의 최솟값은 $a=\frac{1}{2}$일 때 $\frac{1}{4}$이다.

17. **【정답】** ③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+2k}{n}\right)^2=3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\frac{2}{n}=3\int_1^3 x^2dx=3\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3=3\left(9-\frac{1}{3}\right)=26$$

18. **【정답】** ②

$v(t)=3t^2-18t+24=3(t^2-6t+8)=3(t-2)(t-4)$

시각 $t=1$에서 $t=3$까지 물체가 움직인 거리

$$s=\int_1^2(3t^2-18t+24)dt+\int_2^3(-3t^2+18t-24)dt=\left[t^3-9t^2+24t\right]_1^2+\left[-t^3+9t^2-24t\right]_2^3$$

$=(7-27+24)+(-19+45-24)=6$

19. **【정답】** ②

적어도 한 사람이 명중시킬 확률은 전체 확률에서 A, B 모두 명중시킬 확률을 빼주면 되므로

$$1-\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{17}{20}$$

20. **【정답】** ④

$P(A)=a$라 하면 $a+\frac{1}{3}a=1$, $P(a)=a=\frac{3}{4}$

$${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3=10\times\frac{9}{2^{10}}=\frac{45}{512}$$