1. [정답] ③

[해설] $\log 30 = 1 + \log 3$이므로 $n=1$, $\alpha = \log 3$이다.

따라서 $2^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{1}{\alpha}} = 2^1 + 3^{\frac{1}{\log 3}} = 2 + 3^{\log_3 10} = 2 + 10 = 12$

2. [정답] ④

[해설] 삼각형의 세 내각의 크기의 합 $A+B+C=180^\circ=\pi$이므로

$B+C=\pi-A$

$\therefore \cos(B+C)=\cos(\pi-A)=-\cos A=\frac{1}{3}$

$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CA}\times\sin A$

$=\frac{1}{2}\times 6\times 8\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=16\sqrt{2}$

3. [정답] ③

[해설] 주어진 조건으로부터

$\sum_{k=1}^{2020} k a_{k+1} = a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \dots + 2019a_{2020} + 2020a_{2021} = 26 \ \cdots$①,

$\sum_{k=1}^{2020} (k+1) a_k = 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + \dots + 2020a_{2019} + 2021a_{2020} = 47 \ \cdots$②

②$-$①하면

$2(a_1+a_2+\dots+a_{2020})-2020a_{2021}=21$

그런데 $a_{2021}=\frac{1}{2020}$이므로 $2021a_{2020}=1$

즉 $2(a_1+a_2+\dots+a_{2020})=22$

$\therefore \sum_{k=1}^{2020} a_k = a_1+a_2+\dots+a_{2020}=11$

4. [정답] ②

[해설] $f(x)$는 $|x|>1$일 때 $\frac{1}{x}$, $|x|<1$일 때 $3x+5$이므로

$$\lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to 2+} f(x)=(3\times 1+5)+\frac{1}{2}=\frac{17}{2}$$

5. [정답] ①

[해설] $f(x)$가 모든 실수에서 미분가능하므로, 모든 실수에서 연속이기도 하다.

따라서 $f(1)=g(1)=\lim_{x\to 1+} f(x)=1+7-2=6$,

$f(-1)=g(-1)=\lim_{x\to -1-} f(x)=1-7+6=0$

또한 $f'(x)=\begin{cases} 2x+7 & (x<-1) \\ g'(x) & (-1\le x\le 1) \\ 2x+7 & (x>1) \end{cases}$ 에서

$f'(1)=g'(1)=\lim_{x\to 1+} f'(x)=9$, $f'(-1)=g'(-1)=\lim_{x\to -1-} f'(x)=5$

$f(x)$는 삼차 다항함수이므로 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$로 잡으면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$이고,

$f(1)=a+b+c+d=6$, $f(-1)=-a+b-c+d=0$,

$f'(1)=3a+2b+c=9$, $f'(-1)=3a-2b+c=5$

네 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$, $c=1$, $d=2$

$\therefore f(x)=2x^3+x^2+x+2$

$\therefore f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+2=3$

6. [정답] ①

[해설] $f(-x)=f(x)$이므로 $f(x)$는 우함수이다.

따라서 $xf(x)$는 기함수이므로

$$\int_{-3}^{3}(x-1)f(x)dx=\int_{-3}^{3}xf(x)dx-\int_{-3}^{3}f(x)dx$$

$$=-2\int_{0}^{3}f(x)dx=(-2)\times(-3)=6$$

7. [정답] ②

[해설] 전체 학생 수를 A라 하면, 다음과 같이 도식화할 수 있다.

	걸어서 등교	버스로 등교	합계
지각한 학생	$A\times\frac{a}{100}\times\frac{1}{40}$	$A\times\frac{100-a}{100}\times\frac{1}{20}$	
지각하지 않은 학생			
합계	$A\times\frac{a}{100}$	$A\times\frac{100-a}{100}$	A

지각한 학생 중 버스로 등교한 학생 비율이 $\frac{16}{33}$이므로,

$$\frac{A\times\frac{100-a}{100}\times\frac{1}{20}}{A\times\frac{a}{100}\times\frac{1}{40}+A\times\frac{100-a}{100}\times\frac{1}{20}}=\frac{16}{33}$$

좌변의 분모, 분자에 $\frac{4000}{A}$을 곱하여 정리하면

$$\frac{200-2a}{200-a}=\frac{16}{33} \qquad \therefore a=68$$

8. [정답] ②

[해설] $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\times(-2)$

$=f'(1)+2f'(1)=3f'(1)=9$

$\therefore f'(1)=3$

이 때, $g'(x)=2xf(x)+(x^2+1)f'(x)$이므로

$g'(1)=2f(1)+2f'(1)=-8+6=-2$

9. [정답] ③

[해설] $y=-x^2+3x$와 $y=-2x$를 연립하면

$-x^2+3x=-2x$에서 $x^2-5x=0$ $\therefore x=0,\ 5$

즉 두 그래프의 교점의 x좌표가 $0, 5$이므로

두 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^5(-x^2+5x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right]_0^5=-\frac{125}{3}+\frac{125}{2}=\frac{125}{6}$$

직선 $x=a$가 이 넓이를 이등분하므로

$\int_0^a(-x^2+5x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right]_0^a=-\frac{1}{3}a^3+\frac{5}{2}a^2=\frac{125}{12}$이어야 한다.

양변에 12를 곱하여 정리하면

$4a^3-30a^2+125=0$

$(2a-5)(2a^2-10a-25)=0$

$\therefore a=\frac{5}{2},\ \frac{5\pm5\sqrt{3}}{2}$

그런데 $0<a<5$이므로

$a=\frac{5}{2}$

10. [정답] ①

[해설] 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-2$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\times(-2)=8$

$\therefore (k-\alpha^2)(k-\beta^2)=k^2-k(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha\beta)^2=k^2-8k+4$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}(k-\alpha^2)(k-\beta^2)=\sum_{k=1}^{10}(k^2-8k+4)$

$=\frac{10\times11\times21}{6}-8\times\frac{10\times11}{2}+40$

$=385-440+40=-15$

11. [정답] ①

[해설] $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$이므로,

주어진 식은 $(2i)^n=-2^n i$

$2^n i^n=-2^n i=2^n\times(-i)$

$\therefore i^n=-i$

이를 만족하는 자연수 n은 $n=4k-1$(k는 자연수)의 형태이므로,

20 이하의 자연수 중 이를 만족하는 것은 3, 7, 11, 15, 19의 5개다.

12. [정답] ②

[해설] $f(x)=\begin{cases}3x-1 & (x\geq 1)\\ x+1 & (x<1)\end{cases}$ 이고,

$f^{-1}(1)=k$라 하면 $f(k)=1$이므로 k를 범위를 나눠서 생각하면

(i) $k\geq 1$인 경우

$f(k)=3k-1=1 \qquad \therefore k=\frac{2}{3}$

이는 $k\geq 1$이라는 가정에 모순이다.

(ii) $k<1$인 경우

$f(k)=k+1=1 \qquad \therefore k=0$

13. [정답] ③

[해설] 원 $x^2+y^2=20$ 위에서의 점 $(4,2)$에서의 접선의 방정식은

$4x+2y=20$

점 P, Q는 각각 직선 $4x+2y=20$의 x절편, y절편이므로

$y=0$, $x=0$을 대입해 보면

$P(5,0)$, $Q(10,0)$

$\therefore \triangle OPQ=\dfrac{1}{2}\times 5\times 10=25$

14. [정답] ③

[해설] a_2와 a_3은 같은 수이므로,

실질적으로 크기를 결정해야 하는 것은 4개 숫자다.

또한 부등호에 모두 등호가 들어가 있으므로 중복조합을 사용한다.

즉, 주사위를 던져서 나올 수 있는 수 6개 중

중복을 허락하여 4개를 선택하는 경우의 수와 같으므로

${}_6H_4={}_9C_4=126$

15. [정답] ④

[해설] 확률의 총합은 1이므로

$$\int_0^1 ax(1-x)dx=a\int_0^1(-x^2+x)dx=a\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}a=1$$

$\therefore a=6$

$$\therefore P(0\le X\le \frac{3}{4})=\int_0^{\frac{3}{4}}6x(1-x)dx$$

$$=\left[-2x^3+3x^2\right]_0^{\frac{3}{4}}=-\frac{27}{32}+\frac{27}{16}=\frac{27}{32}$$

16. [정답] ②

[해설] $f=g$이면 $x^3+1=3x-1$로부터

$x^3-3x+2=0$

$(x-1)^2(x+2)=0 \qquad \therefore x=-2,\ 1$

따라서 정의역 X는 -2와 1만을 원소로 가지면 되므로

집합 X는 $\{-2\}$, $\{1\}$, $\{-2, 1\}$의 3개다.

17. [정답] ①

[해설] 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정렬하면

$x^2-(2y-4)x+2y^2-6y+5=0$

x는 실수이므로, 위의 x에 대한 이차방정식은 실근을 갖는다.

따라서 판별식 $\frac{D}{4}=(y-2)^2-(2y^2-6y+5) \geq 0$

$y^2-2y+1 \leq 0 \qquad \therefore y=1$($\because y$는 실수)

이를 위의 x에 대하여 정리한 방정식에 대입하면

$x^2+2x+1=0 \qquad \therefore x=-1$

$\therefore x-y=-2$

18. [정답] ④

그래프로부터 $f(b)=a$, $f(c)=b$, $f(d)=c$, $f(e)=d$이고,

역함수의 정의에 의해 $f^{-1}(a)=b$, $f^{-1}(b)=c$, $f^{-1}(c)=d$, $f^{-1}(d)=e$

이를 바탕으로 선택지를 분석하면

① $(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(b)=(f^{-1} \circ f^{-1})(c)=f^{-1}(d)=e$

② $(f \circ f)(d)=f(c)=b$

③ $f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(b)))=f^{-1}(f^{-1}(c))=f^{-1}(d)=e$로 양변이 서로 같음

④ $(f \circ f)(e)=f(d)=c$, $(f^{-1} \circ f^{-1})(b)=f^{-1}(c)=d$로 양변이 다름

19. [정답] ①

$x^3-ax^2+bx-6=(x-1)(x-2)(x+c)$

$=(x^2-3x+2)(x+c)=x^3+(c-3)x^2+(2-3c)x+2c$

양변의 계수를 비교하면

$-a=c-3$, $b=2-3c$, $-6=2c$

$\therefore a=6$, $b=11$, $c=-3$

$\therefore 2a+3b-5c=12+33+15=60$

20. [정답] ③

㉠ $x^2=1$의 양변에 x를 곱하면, 등식의 성질에 의하여 $x^3=x$ (참)

㉡ $x^2-6x+8\le 0$이면 $(x-2)(x-4)\le 0$이므로 $2\le x\le 4$

한편 $x^2-x>0$에서 $x(x-1)>0$이므로 $x>1, x<0$

$2\le x\le 4$의 범위는 $x>1, x<0$의 범위에 포함되므로 참이다.

㉢ $x^2-1\le 0$이면 $(x-1)(x+1)\le 0$이므로 $-1\le x\le 1$

한편 $x^2-3x\le 0$에서 $x(x-3)\le 0$이므로 $0\le x\le 3$

$-1\le x\le 1$의 범위는 $0\le x\le 3$의 범위에 포함되지 않는 부분이 있으므로 거짓

㉣ $2x-1=3$에서 $x=2$이고,

이를 $x^2-4x+4=0$에 대입하면 성립하므로 참

따라서 참인 것은 ㉠, ㉡, ㉣의 3개