

2011학년도 10월 고3 전국연합학력평가 문제지

제2교시

수리 영역(나형)

1

1. $\log_2 3 + \log_2 \frac{8}{3}$ 의 값은? [2점]

- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 두 행렬 A, B 에 대하여

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

일 때, 행렬 $A^2 - AB$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 두 사건 A, B 가 서로 독립이고 $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{11}{12}$ 일 때, $P(B)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

수리 영역(나형)

5. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax + 1 & (x \geq 1) \\ 2x^2 + a & (x < 1) \end{cases}$ 가 모든 실수 x 에 대하여 미분가능하도록 하는 상수 a 의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

7. 이차함수 $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$ 에서 두 상수 α, β 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\alpha < 0 < \beta$
(나) $\alpha + \beta > 0$

이때, 세 정적분

$$A = \int_{\alpha}^0 f(x) dx, \quad B = \int_0^{\beta} f(x) dx, \quad C = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

의 값의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은? [3점]

- ① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < A < C$
④ $C < A < B$ ⑤ $C < B < A$

6. 어느 양식장의 물고기의 무게는 평균 800 g, 표준편차 50 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 양식장에서 임의로 선택한 물고기 한 마리의 무게가 830 g 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

- ① 0.2257 ② 0.2743 ③ 0.3085
④ 0.3446 ⑤ 0.3821

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.3	0.1179
0.4	0.1554
0.5	0.1915
0.6	0.2257

수리 영역(나형)

3

8. 주머니 속에 n 개의 흰 바둑돌과 3개의 검은 바둑돌이 있다.
이 주머니에서 임의로 2개의 바둑돌을 동시에 꺼낼 때, 2개 모두
검은 바둑돌일 확률이 $\frac{1}{12}$ 이다. 이때, 자연수 n 의 값은? [3점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

10. 두 이차정사각행렬 A, B 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에
서 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이고, O 는 영행
렬이다.) [3점]

< 보기 >
ㄱ. $AB=BA$ 이면 $A^2B=BA^2$ 이다.
ㄴ. $AB=O$ 이면 $AB=BA$ 이다.
ㄷ. $A^2B=E$ 이면 $AB=BA$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2, \quad g(x) = \sin x$$

가 있다. 이때, 합성함수 $(f \circ g)(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?
[3점]

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

4

수리 영역(나형)

11. 첫째항이 4이고 공비가 5인 등비수열에서 제21항은 n 자리의 수이다. 이때, 자연수 n 의 값은? (단, $\log 2 = 0.3010$ 으로 계산한다.) [3점]

- ① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

12. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 등식

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (n+1-k)^2 = \sum_{k=1}^n k \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n = 1$ 일 때, (좌변) = 1, (우변) = 1 이므로 $\textcircled{1}$ 이 성립 한다.

(2) $n = m$ 일 때 $\textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} (m+1-k)^2 = \sum_{k=1}^m k$$

이다. $n = m+1$ 일 때 $\textcircled{1}$ 이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k-1} (m+2-k)^2 \\ &= (-1)^0 (m+1)^2 + (-1)^1 m^2 + \dots + (-1)^m \cdot 1^2 \\ &= (m+1)^2 + \boxed{(가)} \cdot \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} (m+1-k)^2 \\ &= (m+1)^2 + \boxed{(나)} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} k \end{aligned}$$

그러므로 $n = m+1$ 일 때도 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

따라서 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

위의 증명에서 (가)에 알맞은 수를 a 라 하고, (나)에 알맞은 식을 $f(m)$ 이라 할 때, $a+f(9)$ 의 값은? [4점]

- ① -46 ② -44 ③ -42 ④ -40 ⑤ -38

수리 영역(나형)

5

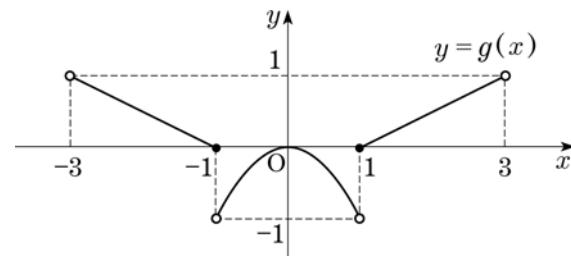
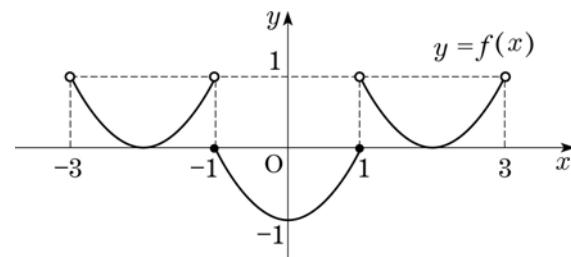
13. 상수함수가 아닌 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_1^x f(t) dt = \{f(x)\}^2$$

을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

14. 그림은 열린 구간 $(-3, 3)$ 에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프이다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



< 보기 >

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + g(x)\} = 1$

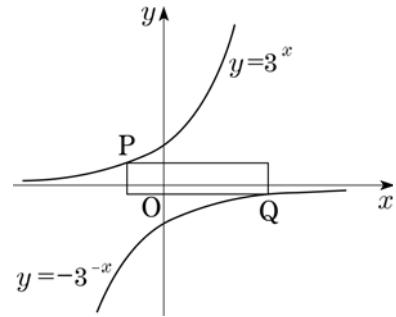
ㄷ. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)g(x) = 0$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

수리 영역(나형)

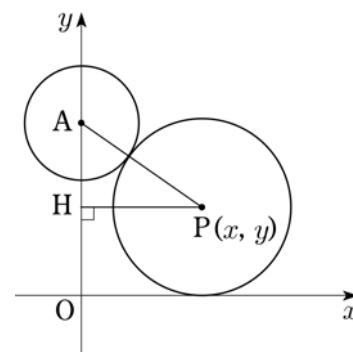
6

15. 함수 $y=3^x$ 의 그래프 위의 점 $P(\alpha, 3^\alpha)$ 과 함수 $y=-3^{-x}$ 의 그래프 위의 점 $Q(\beta, -3^{-\beta})$ 에 대하여 $\beta-\alpha=4$ 가 성립한다. 그림과 같이 두 점 P, Q 를 지나고 x 축, y 축과 평행한 직선을 그려 만들어지는 직사각형의 넓이의 최솟값은? [4점]



- ① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ ⑤ $\frac{8}{9}$

16. 그림과 같이 중심이 $A(0, 3)$ 이고 반지름의 길이가 1인 원에 외접하고 x 축에 접하는 원의 중심을 $P(x, y)$ 라 하자. 점 P 에서 y 축에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{PH}^2}{\overline{PA}}$ 의 값은? [4점]



- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

수리 영역(나형)

7

17. 삼차함수 $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2x - 1$ 에 대하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(-1 + \frac{2k}{n}\right)$$

의 값은? [4점]

- ① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{6}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

18. 다음은 6개의 꼭짓점 A, B, C, D, E, F로 이루어진 그래프를 나타내는 행렬이다.

	A	B	C	D	E	F
A	0	0	1	0	1	1
B	0	0	1	0	1	1
C	1	1	0	1	0	0
D	0	0	1	0	1	1
E	1	1	0	1	0	1
F	1	1	0	1	1	0

이 그래프에 대한 옳은 설명만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

- <보기>
- ㄱ. 두 꼭짓점 A와 F를 연결하는 변이 존재한다.
 - ㄴ. 모든 꼭짓점에는 3개 이상의 변이 연결되어 있다.
 - ㄷ. 꼭짓점 B에서 출발하여 두 개의 변을 지나 꼭짓점 E로 가는 경로가 존재한다.

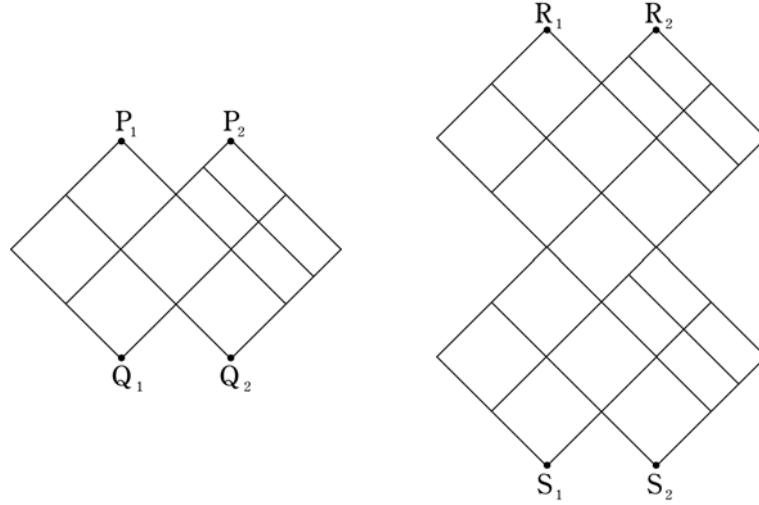
- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

수리 영역(나형)

19. 수직선 위를 움직이는 두 점 P , Q 가 있다. 점 P 는 점 $A(5)$ 를 출발하여 시각 t 에서의 속도가 $3t^2 - 2$ 이고, 점 Q 는 점 $B(k)$ 를 출발하여 시각 t 에서의 속도가 1이다. 두 점 P , Q 가 동시에 출발한 후 2번 만나도록 하는 정수 k 의 값은? (단, $k \neq 5$) [4점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

20. 그림과 같은 두 개의 도로망이 있다.



이차정사각행렬 A 의 (i, j) 성분 a_{ij} ($i = 1, 2, j = 1, 2$)를
 $a_{ij} = (P_i$ 지점에서 도로망을 따라 Q_j 지점까지 최단 거리로 가는
방법의 수)

로 정의하자.

다음 중 R_1 지점에서 도로망을 따라 S_2 지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수와 같은 것은? (단, 모든 도로는 서로 평행하거나 수직이다.) [4점]

- ① 행렬 $2A$ 의 $(1, 2)$ 성분
② 행렬 A^2 의 $(1, 2)$ 성분
③ 행렬 A^2 의 $(2, 1)$ 성분
④ 행렬 A 의 $(1, 2)$ 성분과 $(2, 2)$ 성분의 곱
⑤ 행렬 A 의 $(1, 2)$ 성분과 $(2, 1)$ 성분의 곱

수리 영역(나형)

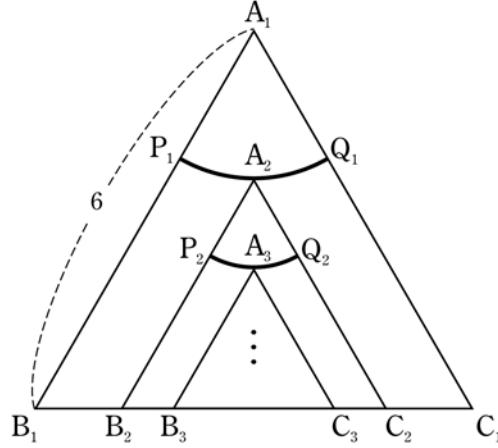
9

21. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 $A_1B_1C_1$ 이 있다.

꼭짓점 A_1 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}\overline{A_1B_1}$ 인 원이 삼각형 $A_1B_1C_1$ 과 만나는 점을 각각 P_1, Q_1 이라 하고 삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 내부에 있는 호 P_1Q_1 을 이등분하는 점을 A_2 라 하자. 점 A_2 를 꼭짓점으로 하고 나머지 두 꼭짓점 B_2, C_2 가 변 B_1C_1 위에 있는 정삼각형 $A_2B_2C_2$ 를 그린다.

꼭짓점 A_2 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}\overline{A_2B_2}$ 인 원이 삼각형 $A_2B_2C_2$ 와 만나는 점을 각각 P_2, Q_2 라 하고 삼각형 $A_2B_2C_2$ 의 내부에 있는 호 P_2Q_2 를 이등분하는 점을 A_3 이라 하자. 점 A_3 을 꼭짓점으로 하고 나머지 두 꼭짓점 B_3, C_3 이 변 B_1C_1 위에 있는 정삼각형 $A_3B_3C_3$ 을 그린다.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 호 P_nQ_n 의 길이를 l_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\sqrt{3}\pi$
- ② $\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$
- ③ $2\sqrt{3}\pi$
- ④ $\frac{5\sqrt{3}}{2}\pi$
- ⑤ $3\sqrt{3}\pi$

단답형

22. $(1+x)^{10}$ 의 전개식에서 x^3 의 계수를 구하시오. [3점]

23. 첫째항이 a 이고 공차가 $a+1$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 = 15$$

를 만족시킬 때, a_7 의 값을 구하시오. [3점]

수리 영역(나형)

- 24.** 곡선 $y = x^3 - 2x$ 위의 점 $(2, 4)$ 에서의 접선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S 라 할 때, $10S$ 의 값을 구하시오.
[3점]

- 26.** x 에 대한 로그방정식

$$(\log x + \log 2)(\log x + \log 4) = -(\log k)^2$$

이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 양수 k 의 값의 범위가 $\alpha < k < \beta$ 일 때, $10(\alpha^2 + \beta^2)$ 의 값을 구하시오. [4점]

- 25.** 어떤 음원에서 나오는 음향출력이 x (W)일 때, 음향파워레벨 L_w (dB)는 다음과 같이 계산한다.

$$L_w = 10 \log \frac{x}{x_0}$$

(단, x_0 은 기준 음향출력을 나타내는 상수이다.)

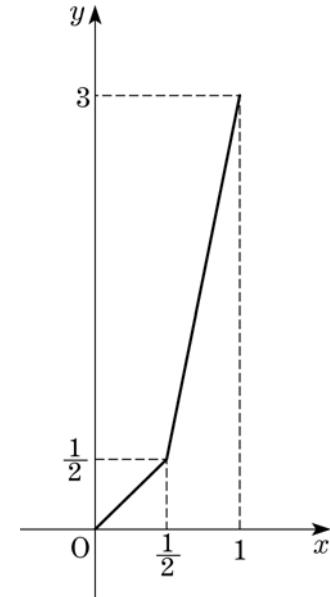
일반적인 대화에서 나오는 음향출력이 $\frac{1}{10^5}$ (W)일 때, 음향파워레벨은 70 (dB)이라고 한다. 비행기 엔진 소리에서 나오는 음향출력이 10^2 (W)일 때, 음향파워레벨은 a (dB)이다. 이때, a 의 값을 구하시오. [3점]

수리 영역(나형)

11

27. 축구공, 농구공, 배구공 중에서 4개의 공을 선택하는 방법의 수를 구하시오. (단, 각 종류의 공은 4개 이상씩 있고, 같은 종류의 공은 서로 구별하지 않는다.) [3점]

28. 연속확률변수 X 가 갖는 값의 범위가 $0 \leq X \leq 1$ 이고 확률밀도 함수의 그래프는 그림과 같다. 확률변수 X 의 평균이 $E(X) = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



수리 영역(나형)

29. 행렬 $A = 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 A^n 의 모든 성분의 합을 S_n 이라 하자. 이때, $S_n = 3^{n+1}$ 을 만족시키는 100 이하의 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오. [4점]

30. 수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1 = 3, a_n = 8n - 4 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

를 만족시키고, 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{S_n} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.