2012학년도 대수능 9월 모의평가 수리영역 나형 정답 및 해설

1.
출제의도 : 로그의 성질을 활용하여 계산할 수 있는가?

$$\log_2 12 + \log_2 \frac{4}{3} = \log_2\left(12 \times \frac{4}{3}\right) = \log_2 16$$
$$= \log_2 2^4 = 4$$

<답> ④

2.
출제의도 : 무한수열의 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{2n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{3}{2}$$

<답> ③

3.
출제의도 : 역행렬을 구할 수 있는가?

$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$이므로

$3A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ 이다.

따라서 $3A^{-1}$ 의 모든 성분의 합은

$2+(-1)+(-3)+3=1$

<답> ④

4.
출제의도 : 확률의 성질을 이해하고 있는가?

두 사건 A, B 가 독립이므로

$P(A\cap B) = P(A)P(B)$이다.

이 때

$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

이므로

$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + P(B) - \frac{1}{2}P(B)$

$\therefore P(B) = \frac{3}{5}$

$\therefore P(A\cap B) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{5} = \frac{3}{10}$

<답> ⑤

5.
출제의도 : 지수방정식의 해를 구할 수 있는가?

$2^x + 2^{5-x} = 33$에서 양변에 2^x을 곱하고 식을 정리하면

$(2^x)^2 - 33\cdot 2^x + 32 = 0$

$(2^x-1)(2^x-32)=0$

따라서 $2^x=1$ 또는 $2^x=32$ 이므로

$x=0$ 또는 $x=5$ 이다.

따라서 모든 실근의 합은 5이다.

<답> ②

6.
출제의도 : 확률분포표에서 평균을 구할 수 있는가?

주어진 확률분포표에서 확률의 합은 1이므로

$a+\frac{1}{4}+b=1,\ a+b=\frac{3}{4}$ ---㉠

또 확률변수 X의 평균 $E(X)=5$이므로

$1\times a + 3\times\frac{1}{4} + 7\times b = 5,\ a+7b=\frac{17}{4}$ ---㉡

㉡ –㉠ 을 계산하면

$6b=\frac{14}{4}$ $\quad\therefore b=\frac{7}{12}$

<답> ③

7.

출제의도 : 로그부등식을 풀 수 있는가?

메뉴가 10이고 항목이 n개씩이므로

걸리는 전체시간은

$10\left\{2+\frac{1}{3}\log_2(n+1)\right\}$

이 때 $10\left\{2+\frac{1}{3}\log_2(n+1)\right\}\leq 30$ 에서

$2+\frac{1}{3}\log_2(n+1)\leq 3,\quad \log_2(n+1)\leq 3$

$n+1\leq 2^3,\ n\leq 7$

따라서 n의 최댓값은 7이다.

<답> ①

8.

출제의도 : 등비수열의 일반항을 구할 수 있는가?

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$S_2=a_1+a_2=a(1+r)$

$S_4=\frac{a(r^4-1)}{r-1}=\frac{a(r-1)(r+1)(r^2+1)}{r-1}$

$=a(r+1)(r^2+1)$

이므로

$\frac{S_4}{S_2}=\frac{a(r+1)(r^2+1)}{a(r+1)}=r^2+1=9$

$\therefore r^2=8$

따라서 $\frac{a_4}{a_2}=\frac{ar^3}{ar}=r^2=8$이다.

<답> ④

9.

출제의도 : 무한등비급수를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

R_1에서 주어진 원의 반지름의 길이가 1이므로 넓이는 π 이고 긴 대각선의 길이는 8이다.

이 때 R_2에서 새로 생긴 마름모의 긴 대각선의 길이가 3이므로 짧은 대각선의 길이는 $\frac{3}{2}$ 이다. 따라서 이 마름모 안에 새로 생긴 원의 반지름의 길이는 $\frac{3}{8}$이므로 R_2에 들어 있는 원의 넓이의 합은 $\pi+2\times\left(\frac{3}{8}\right)^2\pi$ 이다.

같은 방법으로 R_n에 들어 있는 모든 원의 넓이의 합 S_n을 구하면

$$S_n=\pi+2\times\frac{9}{64}\pi+4\times\left(\frac{9}{64}\right)^2\pi+\cdots+2^{n-1}\times\left(\frac{9}{64}\right)^n\pi$$

$$=\frac{\pi\left(1-\left(\frac{9}{32}\right)^n\right)}{1-\frac{9}{32}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi}{1-\frac{9}{32}}=\frac{32}{23}\pi$$

<답> ④

10.

출제의도 : 정적분을 활용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가 ?

$x^2-x+2=2$ 에서 $x^2-x=x(x-1)=0$이므로 곡선과 직선의 교점의 x좌표는 0과 1이다.

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^1 2-(x^2-x+2)\,dx \quad =\int_0^1(-x^2+x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

2012학년도 대수능 9월 모의평가 수리영역 나형 정답 및 해설

$= -\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

<답> ②

11.

출제의도 : 그래프로부터 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

주어진 그래프에서

$\lim_{x\to -1-0} f(x)+f(0)+\lim_{x\to 1+0} f(x)$

$=1+2+(-1)=2$

<답> ⑤

12.

출제의도 : 확률의 성질을 활용하여 확률을 구할 수 있는가 ?

주사위 1개를 던져서 나오는 눈의 수가 6의 약수인 경우는 1, 2, 3, 6 이므로 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

또 동전 3개를 동시에 던져서 앞면이 1개 나올 확률은 $\frac{3}{8}$ 이고 동전 2개를 동시에 던져서 앞면이 1개 나올 확률은 $\frac{2}{4}$ 이다.

따라서 구하는 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$

<답> ③

13.

출제의도 : 정적분의 성질을 알고 활용할 수 있는가?

ㄱ. $f(x)=x$라고 하면

$\int_0^3 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$

$3\int_0^1 x\,dx=3\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{3}{2}$

따라서 $\int_0^3 x\,dx\neq 3\int_0^1 x\,dx$ (거짓)

ㄴ. 정적분의 성질에 의하여 참이다.

ㄷ. $f(x)=x$라고 하면

$\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$

$\left\{\int_0^1 x\,dx\right\}^2=\left(\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\right)^2=\frac{1}{4}$

따라서 $\int_0^1 x^2\,dx\neq\left\{\int_0^1 x\,dx\right\}^2$ (거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ이다.

<답> ①

14.

출제의도 : 행렬의 연산을 할 수 있는가?

$B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$라 하면 (가)에서

$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p-q \\ r-s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore\ p=q,\ r=s$

$\therefore\ B=\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}$

이때, (나)에서

$AB=\begin{pmatrix} p+r & p+r \\ a(p+r) & a(p+r) \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$

이므로 $p+r=2$이다.

또,

$BA=\begin{pmatrix} p(1+a) & p(1+a) \\ r(1+a) & r(1+a) \end{pmatrix}=4\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}$

이므로 $1+a=4$ 즉, $a=3$이다.

($\because$ $1+a\neq 4$이면 $p=0$, $r=0$이므로 모순이다.)

따라서 $A+B=\begin{pmatrix} 1+p & 1+p \\ a+r & a+r \end{pmatrix}$의 (1, 2)성분과 (2, 1)성분의 합은

$1+p+a+r=1+a+(p+r)$

$=1+3+2=6$

<답> ③

15.
출제의도 : 곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있는가 ?

$y'=3x^2$이므로 접점의 좌표를 A (a, a^3-2)라 하면 점 A에서의 접선의 방정식은

$y-\alpha^3+2=3\alpha^2(x-\alpha)$

$\therefore\ y=3\alpha^2x-2\alpha^3-2$

이 접선이 점 (0, -4)를 지나야 하므로

$-4=-2\alpha^3-2$

$\therefore\ \alpha=-1$

따라서 접선의 방정식은 $y=3x-4$이므로 x절편은 $a=\frac{4}{3}$

<답> ②

16.
출제의도 : 정규분포에서의 확률을 구할 수 있는가 ?

제품 A의 무게를 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(m, 1)$을 따르고, 제품 B의 무게를 Y라 하면 확률변수 Y는 정규분포 $N(2m, 2^2)$을 따른다.

이때,

$P(X\ge k)=P\left(\frac{X-m}{1}\ge\frac{k-m}{1}\right)$

$=P(Z\ge k-m)$

이고,

$P(Y\le k)=P\left(\frac{Y-2m}{2}\le\frac{k-2m}{2}\right)$

$=P\left(Z\le\frac{k-2m}{2}\right)=P\left(Z\ge-\frac{k-2m}{2}\right)$

이므로 두 확률이 같으려면

$k-m=-\frac{k-2m}{2}$

이 성립해야 한다.

이때, $2k-2m=-k+2m$ 즉, $3k=4m$이므로 $\frac{k}{m}=\frac{4}{3}$이다.

<답> ⑤

17.
출제의도 : 상용로그의 지표와 가수를 이해할 수 있는가 ?

$\log x=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)이라 하면 $f(x)=n,\ g(x)=\alpha$이다.

(가)에서 $3g(x)=3\alpha$의 값이 정수이어야 하므로 $\alpha=0$ 또는 $\alpha=\frac{1}{3}$ 또는 $\alpha=\frac{2}{3}$이다.

(i) $\alpha=0$일 때,

$\log x^2=2\log x=2n$이므로 $f(x^2)=2n$이다.

따라서 (나)에서

$f(x)+f(x^2)=n+2n=6$

$\therefore\ n=2$

따라서 $\log x=2+0$이므로

$x=10^2$

(ii) $\alpha=\frac{1}{3}$일 때,

$\log x^2=2\log x=2n+\frac{2}{3}$이므로 $f(x^2)=2n$이다.

따라서 (나)에서

$f(x)+f(x^2)=n+2n=6$

$\therefore\ n=2$

따라서 $\log x=2+\frac{1}{3}$이므로

$x=10^{2+\frac{1}{3}}$

(iii) $\alpha=\frac{2}{3}$일 때,

2012학년도 대수능 9월 모의평가 수리영역 나형 정답 및 해설

$\log x^2 = 2\log x = 2n + \frac{4}{3} = 2n + 1 + \frac{1}{3}$ 이므로

$f(x^2) = 2n+1$이다.

따라서 (나)에서

$f(x) + f(x^2) = n + 2n + 1 = 6$

$\therefore \ n = \frac{5}{3}$

이때, n은 정수가 아니므로 모순이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 모든 x의 값의 곱은

$10^2 \times 10^{2+\frac{1}{3}} = 10^{4+\frac{1}{3}} = 10^{\frac{13}{3}}$

<답> ②

18.

출제의도 : 삼차함수의 역함수가 존재할 조건을 구할 수 있는가 ?

삼차함수 $f(x)$의 역함수가 존재할 필요충분조건은 이차방정식

$f'(x) = x^2 - 2ax + 3a = 0$

이 서로 다른 두 실근을 갖지 않는 것이다.

따라서 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = a^2 - 3a \le 0$

이므로 $0 \le a \le 3$이다.

따라서 상수 a의 최댓값은 3이다.

<답> ①

19.

출제의도 : 수열의 일반항을 구할 수 있는가?

$b_2 = (4a_1 - 1)b_1 = 3$이므로

$b_{n+2} - b_{n+1} = b_{n+1} - b_n = \cdots = b_2 - b_1 = 2$

따라서 등차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 2이므로

$b_n = 2n-1$

따라서 $b_{n+1} = 2n+1$이므로 (*)에서

$2n+1 = (4a_n - 1)(2n-1)$

$\therefore \ a_n = \frac{1}{4}\left(\frac{2n+1}{2n-1} + 1\right) = \frac{n}{2n-1}$

따라서 $f(n) = 2n-1$, $g(n) = \frac{n}{2n-1}$ 이므로

$f(14) \times g(5) = 27 \times \frac{5}{9} = 15$

<답> ①

20.

출제의도 : 함수가 연속일 조건을 구할 수 있는가 ?

함수 $y = \{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x \to -0} \{g(x)\}^2 = \lim_{x \to +0} \{g(x)\}^2 = \{g(0)\}^2$

이 성립해야 한다.

이때 이차함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$\lim_{x \to -0} \{g(x)\}^2 = \lim_{x \to -0} \{f(x+1)\}^2 = \{f(1)\}^2 = a^2$,

$\lim_{x \to +0} \{g(x)\}^2$

$= \lim_{x \to -0} \{f(x-1)\}^2 = \{f(-1)\}^2 = (2+a)^2$,

$\{g(0)\}^2 = \{f(1)\}^2 = a^2$

이므로 $a^2 = (2+a)^2$ 즉, $4a + 4 = 0$이어야 한다.

$\therefore \ a = -1$

<답> ②

21.

출제의도 : 속도와 거리의 관계를 추론할 수 있는가 ?

ㄱ. $t=a$일 때, 물체 A의 높이는 $\int_0^a f(t)\,dt$이

고, 물체 B의 높이는 $\int_0^a g(t)dt$이다.

이때, 주어진 그림에서

$\int_0^a f(t)dt > \int_0^a g(t)dt$

이므로 A가 B보다 높은 위치에 있다. (참)

ㄴ. $0 \le t \le b$일 때 $f(t)-g(t) \ge 0$이므로 시각 t에서의 두 물체 A, B의 높이의 차는 점점 커진다.

또, $b < t \le c$일 때 $f(t)-g(t) < 0$이므로 시각 t에서의 두 물체 A, B의 높이의 차는 점점 줄어든다.

따라서 $t=b$일 때, 물체 A와 물체 B의 높이의 차가 최대이다. (참)

ㄷ. $\int_0^c f(t)dt = \int_0^c g(t)dt$이므로 $t=c$일 때, 물체 A와 물체 B는 같은 높이에 있다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

<답> ⑤

22.

출제의도 : 함수의 극한을 구할 수 있는가?

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5} = \lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}$$
$$= \lim_{x\to 5}(x+5) = 10$$

<답> 10

23.

출제의도 : 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가?

주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면

$a_2 = a_1 + d = 1$

$a_1 + a_6 = 2a_1 + 5d = 8$

따라서 위의 두 식을 연립하면

$a_1 = -1,\ d = 2$

$\therefore\ a_{21} = a_1 + 20d = -1 + 40 = 39$

<답> 39

24. 출제의도 : 행렬의 성분을 구하고 행렬의 곱셈을 할 수 있는가?

$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$이므로

$AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 10 & 13\end{pmatrix}$

따라서 행렬 AB의 (2, 2)성분은 13이다.

<답> 13

25.

출제의도 : 무한수열의 극한을 구할 수 있는가?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(10n+1)b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)b_n}{(n+1)a_n} \times \frac{(n+1)(10n+1)}{n^2+1}$$
$$= \frac{7}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{10+\frac{11}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$$
$$= \frac{7}{2}\times 10 = 35$$

<답> 35

26.

출제의도 :곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

$f(x) = (x^3+5)(x^2-1)$ 에서 x에 대하여 미분하면

$f'(x) = 3x^2(x^2-1) + 2x(x^3+5)$

따라서 $f'(1) = 2\times 6 = 12$

<답> 12

27.
출제의도 : 이항계수를 구할 수 있는가?
x^3의 계수는 ${}_5C_3 \times a^2 = 10a^2$이고,
x^4의 계수는 ${}_5C_4 \times a = 5a$이다.
따라서 $10a^2 = 5a$에서
$a = \frac{1}{2}$ ($\because$ $a > 0$)
$\therefore$ $60a = 30$

<답> 30

28.
출제의도 : 계차수열을 이용하여 수열의 극한을 구할 수 있는가?
$a_n = 12 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$)
점 P_n을 지나고 기울기가 a_n인 직선의 방정식은
$y - b_n^2 = a_n(x + b_n)$ 즉, $y = a_n x + a_n b_n + b_n^2$
이 직선과 곡선 $y = x^2$의 교점의 x좌표는 방정식
$a_n x + a_n b_n + b_n^2 = x^2$ 즉,
$(x + b_n)(x - a_n - b_n) = 0$의 실근이다.
$\therefore$ $b_{n+1} = a_n + b_n$ ($\because$ $b_{n+1} \neq -b_n$)
이때, $b_{n+1} - b_n = a_n$이므로 수열 $\{b_n\}$의 계차수열이 $\{a_n\}$이다.

$$\therefore\ b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} b_n = 1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 12\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

$$= 1 + \frac{12}{1 - \frac{1}{3}} = 1 + 18 = 19$$

<답> 19

29.
출제의도 : 표본평균의 확률을 구할 수 있는가?
확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(50, \frac{\sigma^2}{16}\right)$을 따르므로

$$P(50 \le \overline{X} \le 56)$$

$$= P\left(\frac{50 - 50}{\frac{\sigma}{4}} \le \frac{\overline{X} - 50}{\frac{\sigma}{4}} \le \frac{56 - 50}{\frac{\sigma}{4}}\right)$$

$$= P\left(0 \le Z \le \frac{24}{\sigma}\right)$$

$$= P(0 \le Z \le 1.5)$$

따라서 $\frac{24}{\sigma} = 1.5$이므로

$$\sigma = \frac{24}{1.5} = 24 \times \frac{2}{3} = 16$$

<답> 16

30.
출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 수열의 일반항을 추론할 수 있는가?
(i) $n = 1$일 때
세 점 $(1, 2^1)$, $(2, 2^2)$, $(3, 2^3)$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우이므로
$a_1 = 2 \times (2^3 - 2^1) = 12$
(ii) $n = 2$일 때
세 점 $(1, 2^1)$, $(2, 2^2)$, $(3, 2^3)$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우이므로
$a_2 = 2 \times (2^3 - 2^2) = 8$
(iii) $n \ge 3$일 때
세 점 $(n-2, 2^{n-2})$, $(n-1, 2^{n-1})$, $(n, 2^n)$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우이므로
$a_n = 2 \times (2^n - 2^{n-2}) = 3 \times 2^{n-1}$
(i), (ii), (iii)에서

$\sum_{k=1}^{7} a_k = 12+8+3(2^2+2^3+\cdots+2^6)$

$= 20+3\times\frac{2^2(2^5-1)}{2-1} = 20+12\times31 = 392$

<답> 392

참고

위의 풀이의 (iii)에서

세 점 $(n-1, 2^{n-1})$, $(n, 2^n)$, $(n+1, 2^{n+1})$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우에는 점 $(n-2, 2^{n-2})$도 이 정사각형의 내부에 포함되므로 조건을 만족시키지 않는다.

마찬가지로, 세 점

$(n, 2^n)$, $(n+1, 2^{n+1})$, $(n+2, 2^{n+2})$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우도 조건을 만족시키지 않는다.