2012학년도 대수능 9월 모의평가 수리영역 가형 정답 및 해설

1.

출제의도 : 로그의 성질을 활용하여 계산할 수 있는가?

$$\log_2 12 + \log_2 \frac{4}{3} = \log_2 \left(12 \times \frac{4}{3}\right) = \log_2 16$$

$$= \log_2 2^4 = 4$$

<답> ④

2.

출제의도 : 두 벡터가 수직일 조건을 구할 수 있는가?

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x+1) \times 1 + 2(-x)$$

$$= -x + 1 = 0$$

$$\therefore\ x = 1$$

<답> ①

3.

출제의도 : 역행렬을 구할 수 있는가?

$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$이므로

$3A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ 이다.

따라서 $3A^{-1}$ 의 모든 성분의 합은

$2 + (-1) + (-3) + 3 = 1$

<답> ④

4.

출제의도 : 독립인 두 사건 A, B에 대하여 $A \cap B$의 확률을 구할 수 있는가?

$$P(A^C) = 1 - P(A) = \frac{6}{7}$$

$$\therefore\ P(A) = \frac{1}{7}$$

또한,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

에서

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{7} + P(B) - \frac{1}{7}P(B),\quad \frac{6}{7}P(B) = \frac{4}{7}$$

$$\therefore\ P(B) = \frac{2}{3}$$

<답> ⑤

5.

출제의도 : 두 직선이 이루는 각의 크기를 구할 수 있는가?

두 직선 $y = x$, $y = -2x$가 x축과 이루는 양의 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라고 하면

$$\tan\theta_1 = 1,\quad \tan\theta_2 = -2$$

$$\therefore\ \tan\theta = |\tan(\theta_1 - \theta_2)|$$

$$= \left|\frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}\right|$$

$$= \left|\frac{1 - (-2)}{1 + 1 \times (-2)}\right|$$

$$= 3$$

<답> ④

6.

출제의도 : 원순열에 대한 경우의 수를 구할 수 있는가?

A와 B를 한 묶음으로 생각해서 5개를 원형의 실험기구에 넣는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$
또한, A와 B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
따라서 구하고자 하는 경우의 수는
$24\times 2=48$

<답> ②

7.
출제의도 : 로그부등식을 풀 수 있는가?
메뉴가 10이고 항목이 n개씩이므로 걸리는 전체시간은
$$10\left\{2+\frac{1}{3}\log_2(n+1)\right\}$$
이 때 $10\left\{2+\frac{1}{3}\log_2(n+1)\right\}\le 30$ 에서
$$2+\frac{1}{3}\log_2(n+1)\le 3,\quad \log_2(n+1)\le 3$$
$$n+1\le 2^3,\quad n\le 7$$
따라서 n의 최댓값은 7이다.

<답> ①

8.
출제의도 : 합성변환에서 점을 옮길 수 있는가?
합성변환 $f\circ g$를 나타내는 행렬은
$$\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$
이므로 합성변환 $f\circ g$에 의하여 점 (-1, 1)이 옮겨지는 점의 좌표는
$$\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$$
즉, (-1, 1) 이다.

<답> ①

9.
출제의도 : 연속일 조건을 구할 수 있는가?
함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로
$$a=\lim_{x\to 0}f(x)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x(e^x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{3}{e^x+1}\right)$$
$$=1\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

<답> ②

10.
출제의도 : 조건부확률을 이용하여 외적인 상황에서 확률을 구할 수 있는가?
남학생을 선택하는 사건을 A, 여학생을 선택하는 사건을 B 자격증 K를 가지고 있는 학생을 선택하는 사건을 C라고 하면
$$P(A)=\frac{2}{5},\quad P(B)=\frac{3}{5},\quad P(C)=\frac{7}{10}$$
또한, $P(A\cap C)=\frac{1}{5}$ 이므로
$$P(A)=P(A\cap C)+P(A\cap C^C)$$
$$\frac{2}{5}=\frac{1}{5}+P(A\cap C^C)$$
$$\therefore\ P(A\cap C^C)=\frac{1}{5}$$
따라서 $P(C^C)=1-P(C)=\frac{3}{10}$ 이므로
$$P(C^C)=P(A\cap C^C)+P(B\cap C^C)$$

$\frac{3}{10}=\frac{1}{5}+P(B\cap C^C)$

$\therefore\ P(B\cap C^C)=\frac{1}{10}$

$\therefore\ P(B|C^C)=\frac{P(B\cap C^C)}{P(C^C)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{3}$

<답> ②

11.
출제의도 : 그래프를 통하여 합성함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$\lim_{x\to+0}f(f(x))=\lim_{t\to3-0}f(t)=3$

$\lim_{x\to2+0}f(f(x))=f(3)=2$

$\therefore\ \lim_{x\to+0}f(f(x))+\lim_{x\to2+0}f(f(x))$

$=3+2=5$

<답> ⑤

12.
출제의도 : 그래프를 통하여 무리방정식의 실근의 합을 구할 수 있는가?

$f(-x)=t$라고 하면

$\sqrt{t+5}=t-1$

양변을 제곱하면

$t+5=t^2-2t+1,\ t^2-3t-4=0$

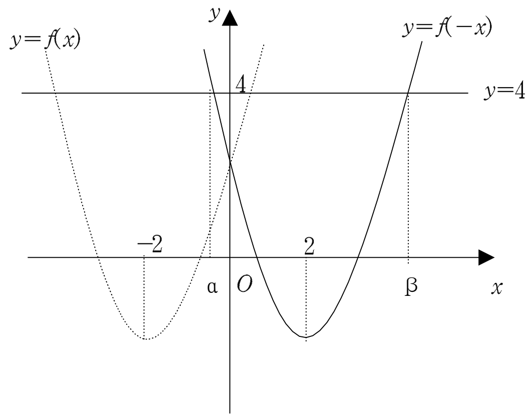
$(t-4)(t+1)=0$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=4$

이때, $t=-1$은 무연근이므로

$t=f(-x)=4\cdots$㉠

따라서 $y=f(-x)$의 그래프와 직선 $y=4$의 교점의 x좌표를 각각 α,β라고 하면 그림과 같다.



즉, ㉠을 만족하는 x의 값의 합은

$\frac{\alpha+\beta}{2}=2\quad\therefore\ \alpha+\beta=4$

<답> ⑤

13.
출제의도 : 타원의 방정식을 구하고 타원의 정의를 활용할 수 있는가?

조건을 만족하는 타원의 방정식을

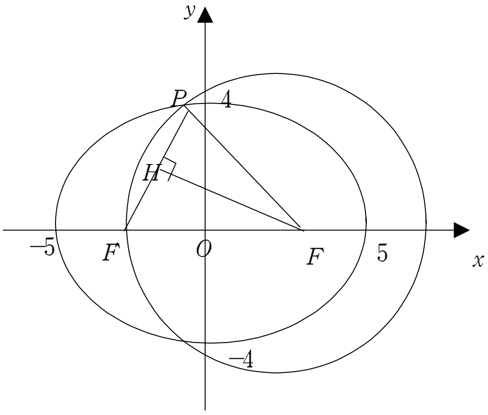
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ \ (a>b>0)$ 라 하면

$2a=10,\ 2b=6\ \therefore\ a=5,\ b=3$

따라서, 두 초점 F,F'의 좌표를 각각 $(c,0),\ (-c,0)$ ($c>0$)라 하면

$F(\sqrt{5^2-3^2},0),\ F'(-\sqrt{5^2-3^2},0)$

즉, $F(4,0),\ F'(-4,0)$ 이다.



이때, $\overline{FF'}=\overline{FP}=8$, $\overline{PF}+\overline{PF'}=10$이므로 $\overline{F'P}=2$ 이고 점 F에서 선분 PF'에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{FH}=\sqrt{8^2-1^2}=3\sqrt{7}$

따라서 구하고자 하는 삼각형 PFF'의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times 3\sqrt{7}=3\sqrt{7}$

<답> ④

14.

출제의도 : 행렬의 연산을 할 수 있는가?

$B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$라 하면 (가)에서

$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p-q \\ r-s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore\ p=q,\ r=s$

$\therefore\ B=\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}$

이때, (나)에서

$AB=\begin{pmatrix} p+r & p+r \\ a(p+r) & a(p+r) \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$

이므로 $p+r=2$이다.

또,

$BA=\begin{pmatrix} p(1+a) & p(1+a) \\ r(1+a) & r(1+a) \end{pmatrix}=4\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}$

이므로 $1+a=4$ 즉, $a=3$이다.

($\because$ $1+a\neq 4$이면 $p=0$, $r=0$이므로 모순이다.)

따라서 $A+B=\begin{pmatrix} 1+p & 1+p \\ a+r & a+r \end{pmatrix}$의 (1, 2)성분과 (2, 1)성분의 합은

$1+p+a+r=1+a+(p+r)$

$=1+3+2=6$

<답> ③

15.

출제의도 : 직선과 평면의 위치관계, 직선과 직선의 위치 관계를 파악할 수 있는가?

ㄱ. $\overline{AC}\perp\overline{AD}$, $\overline{AC}\perp\overline{AB}$ 이므로

$\overline{AC}\perp$(평면ABP)

따라서 삼각형 ACP는 $\overline{AC}=\overline{AP}$ 이고 $\angle CAP=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$\overline{CP}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{AP}^2}$

$=\sqrt{2\,\overline{AP}^2}$

$=\sqrt{2\,\overline{BP}^2}=\sqrt{2}\,\overline{BP}$ (참)

ㄴ. 세 점 A, B, C는 한 평면 위에 있으면서 일직선 위에 있지 않고, 점 P는 그 평면 위의 점이 아니므로 직선 AB와 직선 CP는 만나지 않는다. 즉, 직선 AB와 직선 CP는 꼬인 위치에 있다. (참)

ㄷ. ㄱ에서 $\overline{AC}\perp$(평면ABP) 이므로

$\overline{AC}\perp\overline{PM}$

또한, $\overline{PM}\perp\overline{AB}$ 이므로

$\overline{PM}\perp$(평면ABC)

따라서 직선 PM과 직선 BC는 서로 수직이다. (참)

<답> ⑤

16.

출제의도 : 정적분의 성질과 부분적분법을 이용하여 두 영역의 넓이가 같을 조건을 구할 수 있는가?

$$\int_0^k x\sin x dx = \int_k^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\sin x dx\right) dx$$

$$\int_0^k x\sin x dx = \int_k^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}\, dx - \int_k^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$$

$$\int_0^k x\sin x dx + \int_k^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = \int_k^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}\, dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = \int_k^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}\, dx$$

이때, $f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$라고 하면 $f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x$ 이므로

(좌변) $= [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$

$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

(우변) $= [\frac{\pi}{2} x]_k^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} k$

따라서 $1 = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} k$ 이므로

$\frac{\pi}{2} k = \frac{\pi^2}{4} - 1$

$\therefore\ k = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}$

<답> ③

17.

출제의도 : 표본평균의 분포를 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

X는 정규분포 $N(m, 30^2)$을 따르므로 크기가 9인 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$E(\overline{X}) = m$, $\sigma(\overline{X}) = \frac{30}{\sqrt{9}} = 10$

따라서, $\overline{X}$는 정규분포 $N(m,\ 10^2)$을 따른다.

$G(k) = P(X \le m + 30k)$

$= P\left(Z \le \frac{m+30k-m}{30}\right)$

$= P(Z \le k)$

$H(k) = P(\overline{X} \ge m - 30k)$

$= P\left(Z \ge \frac{m-30k-m}{10}\right)$

$= P(Z \ge -3k)$

ㄱ. $G(0) = P(Z \le 0) = 0.5$

$H(0) = P(Z \ge 0) = 0.5$

$\therefore\ G(0) = H(0)$ (참)

ㄴ .

$G(3) = P(Z \le 3) = 0.5 + P(0 \le Z \le 3)$

$H(1) = P(Z \ge -3) = P(-3 \le Z \le 0) + 0.5$

$= P(0 \le Z \le 3) + 0.5$

$\therefore\ G(3) = H(1)$ (참)

ㄷ. $G(1) = P(Z \le 1)$, $H(-1) = P(Z \ge 3)$ 이므로

$G(1) + H(-1) = P(Z \le 1) + P(Z \ge 3)$

$= 1 - P(1 \le Z \le 3)$

$P(1 \le Z \le 3) > 0$ 이므로

$G(1) + H(-1) < 1$ (거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

<답> ③

18.
출제의도 : 좌표공간에서 두 직선의 교점의 좌표를 구할 수 있는가?
직선 AB의 방정식은

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$$

즉, $x=\frac{y+1}{2}=1-z$

점 $(a, b, 0)$을 지나고 z축에 평행한 직선 l의 방정식은

$x=a,\ y=b$

이므로 직선 AB와 직선 l의 교점의 좌표를 $C(a, b, c)$로 놓을 수 있다.
점 C는 직선 AB 위의 점이므로

$$a=\frac{b+1}{2}=1-c$$

따라서, $a=\frac{b+1}{2}$에서 $b=2a-1$이고

점 $(a, b, 0)$이 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=13$

$\therefore\ a^2+(2a-1)^2=13$

$5a^2-4a-12=0$, $(a-2)(5a+6)=0$

$a<0$ 이므로 $a=-\frac{6}{5}$

$\therefore\ b=2a-1=2\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)-1=-\frac{17}{5}$

$\therefore\ a+b=-\frac{6}{5}+\left(-\frac{17}{5}\right)=-\frac{23}{5}$

<답> ②

19.
출제의도 : 수열의 일반항을 구할 수 있는가 ?

$b_2=(4a_1-1)b_1=3$이므로

$b_{n+2}-b_{n+1}=b_{n+1}-b_n=\cdots=b_2-b_1=2$

따라서 등차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 2이므로

$b_n=2n-1$

따라서 $b_{n+1}=2n+1$이므로 (*)에서

$2n+1=(4a_n-1)(2n-1)$

$\therefore\ a_n=\frac{1}{4}\left(\frac{2n+1}{2n-1}+1\right)=\frac{n}{2n-1}$

따라서 $f(n)=2n-1$, $g(n)=\frac{n}{2n-1}$ 이므로

$f(14)\times g(5)=27\times\frac{5}{9}=15$

<답> ①

20.
출제의도 : 정적분과 미분의 관계를 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?
조건(나)에서

$$\cos x\int_0^x f(t)\,dt=-\sin x\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)\,dt$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$-\sin x\int_0^x f(t)\,dt+\cos x\cdot f(x)$$
$$=-\cos x\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)\,dt-\sin x\cdot f(x)$$

등식의 양변에 $x=\frac{\pi}{4}$ 를 대입하면

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\,dt+\frac{\sqrt{2}}{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} f(t)\,dt-\frac{\sqrt{2}}{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

2012학년도 대수능 9월 모의평가 수리영역 가형 정답 및 해설

$$\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(t)\,dt+\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}f(t)\,dt$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 1 \quad (\because \text{ 조건(가) })$$

$$\therefore\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

<답> ④

21.

출제의도 : 합성함수의 미분법을 이용하여 미지수를 구할 수 있는가?

ㄱ. α, β, γ는 방정식 $f(x)=x$의 근이므로

$f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$, $f(\gamma)=\gamma$

$\therefore\ f(f(\alpha))=f(\alpha)=\alpha$

$f(f(\beta))=f(\beta)=\beta$

$f(f(\gamma))=f(\gamma)=\gamma$

따라서, α, β, γ는 방정식 $f(f(x))=x$의 근이다. (참)

ㄴ. $f(x)-x$가 삼차식이므로

$h(x)=px^2+qx+r$로 놓을 수 있다.

$\therefore\ f(f(x))=\{f(x)-x\}g(x)+h(x)$

$=\{f(x)-x\}g(x)+px^2+qx+r$

$f(f(\alpha))=p\alpha^2+q\alpha+r=\alpha$ …㉠

$f(f(\beta))=p\beta^2+q\beta+r=\beta$ …㉡

$f(f(\gamma))=p\gamma^2+q\gamma+r=\gamma$ …㉢

㉠-㉡에서 $p(\alpha^2-\beta^2)+q(\alpha-\beta)=\alpha-\beta$

$\alpha\neq\beta$이므로 $p(\alpha+\beta)+q=1$ …㉣

㉡-㉢에서 $p(\beta^2-\gamma^2)+q(\beta-\gamma)=\beta-\gamma$

$\beta\neq\gamma$이므로 $p(\beta+\gamma)+q=1$ …㉤

㉣-㉤에서 $p(\alpha-\gamma)=0$

$\alpha\neq\gamma$이므로 $p=0$

㉣에서 $q=1$

㉠에서 $\alpha+r=\alpha$이므로 $r=0$

$\therefore\ h(x)=x$ (참)

ㄷ. $f(f(x))=\{f(x)-x\}g(x)+x$ …(*)

조건(나),(다)에서

$f(3)=7$, $f(f(3))=5$이므로

$f(f(3))=\{f(3)-3\}g(3)+3$에서

$5=(7-3)g(3)+3 \quad \therefore\ g(3)=\frac{1}{2}$

(*)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(f(x))f'(x)$

$=\{f'(x)-1\}g(x)+\{f(x)-x\}g'(x)+1$

$x=3$을 대입하면

$f'(f(3))f'(3)$

$=\{f'(3)-1\}g(3)+\{f(3)-3\}g'(3)+1$

조건(나)에서 $f'(3)=0$이므로

$0=(0-1)\times\frac{1}{2}+(7-3)g'(3)+1$

$4g'(3)=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ g'(3)=-\frac{1}{8}$ (거짓)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

<답> ③

22.

출제의도 : 로그함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

$f(x)=\ln(2x-1)$에서

$f'(x)=\frac{2}{2x-1}$ 이므로

$f'(10)=\frac{2}{19}$

$\therefore\ p+q=19+2=21$

<답> 21

23.

출제의도 : 확률밀도함수의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

$\int_0^1 f(x)\,dx=1$ 이므로

$$\int_0^1 (ax+b)\,dx=\left[\frac{a}{2}x^2+bx\right]_0^1=\frac{a}{2}+b=1$$

$\therefore\ a+2b=2\ \cdots㉠$

$E(X)=\int_0^1 xf(x)\,dx=\frac{7}{12}$ 이므로

$$\int_0^1 (ax^2+bx)\,dx=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{7}{12}$$

$\therefore\ 4a+6b=7\ \cdots㉡$

㉠,㉡을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ 80ab=80\times1\times\frac{1}{2}=40$

<답> 40

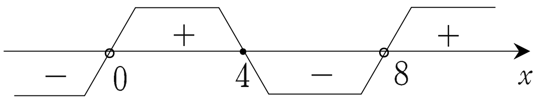
24.

출제의도 : 분수부등식의 해를 구할 수 있는가?

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-8}\le0$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{2x-8}{x(x-8)}\le0$$

$\Leftrightarrow\ x(x-4)(x-8)\le0,\ x\ne0,\ x\ne8$



따라서, 주어진 부등식의 해는

$x<0$ 또는 $4\le x<8$

이므로 자연수 x는 $4,5,6,7$이고,

구하는 합은 $4+5+6+7=22$이다.

<답> 22

25.

출제의도 : 무한수열의 극한을 구할 수 있는가?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(10n+1)b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)b_n}{(n+1)a_n}\times\frac{(n+1)(10n+1)}{n^2+1}$$

$$=\frac{7}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{10+\frac{11}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

$$=\frac{7}{2}\times10=35$$

<답> 35

26.

출제의도 : 쌍곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점 (a,b)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{ax}{12}-\frac{by}{8}=1$$

이고, 접선이 타원 $\frac{(x-2)^2}{4}+y^2=1$의 넓이를 이등분하므로 접선은 타원의 중

심 $(2, 0)$을 지난다.

따라서, $\frac{2a}{12}-0=1$에서 $a=6$

또한, $\frac{a^2}{12}-\frac{b^2}{8}=1$이므로

$\frac{36}{12}-\frac{b^2}{8}=1$에서 $\frac{b^2}{8}=2$, $b^2=16$

$\therefore\ a^2+b^2=36+16=52$

<답> 52

27.

출제의도 : 삼각함수의 합성을 이용하여 최댓값을 구할 수 있는가?

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{BD}^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos\theta$$
$$=2-2\cos\theta$$

삼각형 BCD는 정삼각형이므로

삼각형 BCD의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\overline{BD}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(2-2\cos\theta)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos\theta)$$

삼각형 ABD의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta$$

이므로 사각형 $ABCD$의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos\theta)$$
$$=\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서, S는 $\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ 즉, $\theta=\frac{5}{6}\pi$일 때 최댓값을 갖는다.

$$\therefore\ 60\sin^2\theta=60\sin^2\frac{5}{6}\pi$$
$$=60\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=15$$

<답> 15

28.

출제의도 : 계차수열을 이용하여 수열의 극한을 구할 수 있는가?

$a_n=12\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

점 P_n을 지나고 기울기가 a_n인 직선의 방정식은

$y-b_n^2=a_n(x+b_n)$ 즉, $y=a_nx+a_nb_n+b_n^2$

이 직선과 곡선 $y=x^2$의 교점의 x좌표는 방정식

$a_nx+a_nb_n+b_n^2=x^2$ 즉,

$(x+b_n)(x-a_n-b_n)=0$의 실근이다.

$\therefore\ b_{n+1}=a_n+b_n$ $(\because\ b_{n+1}\neq-b_n)$

이때, $b_{n+1}-b_n=a_n$이므로 수열 $\{b_n\}$의 계차수열이 $\{a_n\}$이다.

$$\therefore\ b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}a_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}a_k$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}b_n=1+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}a_k$$
$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}12\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$
$$=1+\frac{12}{1-\frac{1}{3}}=1+18=19$$

<답> 19

29.

출제의도 : 두 평면이 이루는 각을 구하여 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

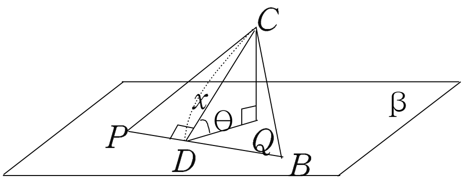
점 P가 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점이고, 점 C에서 평면 α에 이르는 거리가 3이므로 점 P에서 평면 α에 이르는 거리는 1이다.

따라서, 직선 PB는 평면 α와 평행하다.

삼각형 ABC와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라고 하자.

평면 α에 평행하고 직선 PB를 포함하는 평면을 β라고 하면

삼각형 PBC와 평면 β가 이루는 각의 크기도 θ이다.



점 C에서 직선 PB에 내린 수선의 발을 D라 하고, 점 C에서 평면 β에 내린 수선의 발을 Q라 하자.

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{DQ}\perp\overline{PB}$이므로

$\angle CDQ=\theta$이다.

$\overline{CQ}=3-1=2$이므로

$\overline{CD}=x$라 하면 $\sin\theta=\dfrac{2}{x}$이다.

삼각형 ABC의 넓이가 9이므로

삼각형 PBC의 넓이는 $9\times\dfrac{2}{3}=6$

따라서, $\dfrac{1}{2}\times\overline{PB}\times x=6$에서

$\dfrac{1}{2}\times4\times x=6$, $x=3$

$\therefore\ \sin\theta=\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{4}{9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

따라서, 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이 S는

$S=9\cos\theta=9\times\dfrac{\sqrt{5}}{3}=3\sqrt{5}$

$\therefore\ S^2=45$

<답> 45

30.

출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 수열의 일반항을 추론할 수 있는가?

(i) $n=1$일 때

세 점 $(1,2^1)$, $(2,2^2)$, $(3,2^3)$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우이므로

$a_1=2\times(2^3-2^1)=12$

(ii) $n=2$일 때

세 점 $(1,2^1)$, $(2,2^2)$, $(3,2^3)$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우이므로

$a_2=2\times(2^3-2^2)=8$

(iii) $n\ge3$일 때

세 점 $(n-2,2^{n-2})$, $(n-1,2^{n-1})$, $(n,2^n)$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우이므로

$a_n=2\times(2^n-2^{n-2})=3\times2^{n-1}$

(i), (ii), (iii)에서

$\sum_{k=1}^{7}a_k=12+8+3(2^2+2^3+\cdots+2^6)$

$$=20+3\times\frac{2^2(2^5-1)}{2-1}=20+12\times31=392$$

<답> 392

참고
위의 풀이의 (iii)에서
세 점 $(n-1, 2^{n-1})$, $(n, 2^n)$, $(n+1, 2^{n+1})$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우에는 점 $(n-2, 2^{n-2})$도 이 정사각형의 내부에 포함되므로 조건을 만족시키지 않는다.
마찬가지로, 세 점 $(n, 2^n)$, $(n+1, 2^{n+1})$, $(n+2, 2^{n+2})$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우도 조건을 만족시키지 않는다.