

제 2 교시

수리 영역 (가형)

성명

수험번호

3

- 자신이 선택한 유형('가'형 / '나'형)의 문제지인지 확인하시오.
- 문제지에 성명과 수험번호를 정확히 써 넣으시오.
- 답안지에 성명과 수험번호를 써 넣고, 또 수험번호와 답을 정확히 표시하시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $a = \sqrt{3}$, $b = \log_4 16$ 일 때, a^b 의 값은? [2점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

2. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $A + A^{-1}$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 정적분 $\int_{-1}^1 (x^3 - 3x^2 - 2x + 4) dx$ 의 값은? [2점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

4. $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는? [3점]

- ① 1 ② 6 ③ 10 ④ 15 ⑤ 20

5. 표는 연비가 $x(\text{km/L})$ 인 자동차 A 와 연비가 $y(\text{km/L})$ 인 자동차 B 의 연료량에 따른 주행거리를 나타낸 것이다.

연료량(L)	주행거리(km)	
	A자동차	B자동차
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
15	a	b
20	c	d
25	e	f
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

다음은 $b+c=600$, $d+e=770$ 일 때, x 와 y 의 값을 구하는 식을 행렬로 나타낸 것이다.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & \alpha \\ \beta & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 \\ 770 \end{pmatrix}$$

이때, 두 상수 α , β 에 대하여 $\alpha\beta$ 의 값은? (단, 연비는 1L의 연료로 달릴 수 있는 거리를 수치로 나타낸 것이다.) [3점]

- ① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

6. 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ 으로 나타내어지는 일차변환에 의하여

직선 $x+2y-2=0$ 위의 모든 점이 점 (a, b) 로 옮겨진다. 이때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은? [3점]

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

7. 자연수 k 에 대하여 집합 A_k 를

$$A_k = \left\{ x \mid \log x - [\log x] = \frac{1}{k}, 1 \leq x \leq 10^5 \right\}$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

—<보 기>—

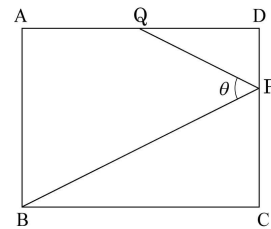
ㄱ. $\sqrt{10} \in A_2$

ㄴ. $n(A_3) = n(A_5)$

ㄷ. $A_m \cap A_n \neq \emptyset$ 를 만족하는 서로 다른 자연수 m, n 이 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 그림과 같이 $\overline{AB} : \overline{BC} = 3 : 4$ 인 직사각형 ABCD에서 선분 CD를 2:1로 내분하는 점을 P, 선분 AD의 중점을 Q라 하자. $\angle BPQ = \theta$ 일 때, $\cos 2\theta$ 의 값은? [3점]



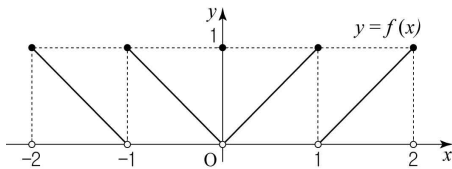
- ① $-\frac{9}{25}$ ② $-\frac{7}{25}$ ③ $-\frac{4}{25}$
④ $-\frac{1}{25}$ ⑤ 0

9. $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \sin 2x$ 의 역함수를

$g(x)$ 라 할 때, $g'(\frac{1}{2})$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

10. 그림은 닫힌 구간 $[-2, 2]$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 의 그래프이다.



닫힌 구간 $[-2, 2]$ 에서 정의된 함수 $y = g(x)$ 가
 $f(x)g(x) = 1$

을 만족할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ 가 존재한다.

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 1-0} (g \circ f)(x) = 1$

ㄷ. 열린 구간 $(-2, 2)$ 에서 함수 $y = x^2 g(x)$ 의 불연속인 점은 2개다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
 ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

11. 두 점 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 에 대하여 $d(P, Q)$ 를

$$d(P, Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

라 정의하자. 두 점 $A(1, 0)$ 과 $P_n(n, 2^n)$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} d(A, P_n)$ 의 값은? [3점]

- ① $2^9 + 45$ ② $2^{10} + 43$ ③ $2^{10} + 45$
 ④ $2^{11} + 43$ ⑤ $2^{11} + 45$

12. 곡선 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 과 x 축 및 두 직선 $x = e, x = e^2$ 으로 둘러싸인

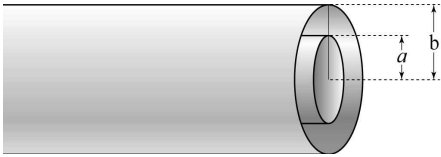
도형을 x 축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피는? [3점]

- ① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π ④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

13. 도체가 전하를 저장할 수 있는 능력을 정전용량이라 한다. 원통도체에서 안쪽 원통의 반지름의 길이 a 와 바깥쪽 원통의 반지름의 길이 b 에 대하여 정전용량 C 는

$$C = \frac{k}{\log b - \log a} \quad (\text{단, } k \text{는 상수, } C \text{의 단위는 } F/m)$$

이라 한다. $b = 2a$ 일 때의 정전용량 C_1 과 $b = na$ 일 때의 정전용량 C_2 에 대하여 $\frac{C_1}{C_2} > \frac{1}{\log 2}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은? [3점]



- ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

14. 곡선 $y = e^x - 1$ 위의 점 $P(1, e-1)$ 에서의 접선을 l 이라 하자. 이때, 곡선 $y = e^x - 1$ 과 y 축, 접선 l 로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

- ① $\frac{e}{2} - 1$ ② $e - \frac{3}{2}$ ③ $\frac{e}{2}$ ④ $e - 1$ ⑤ $\frac{e}{2} + 1$

15. 집합 M 을

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \mid x, y, z, w \text{는 } x < y < z < w \text{인 실수} \right\}$$

라 하자. $X \in M$ 인 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 에 대하여 네 점 (a, b) , (c, d) , (a, c) , (b, d) 를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 $S(X)$ 라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

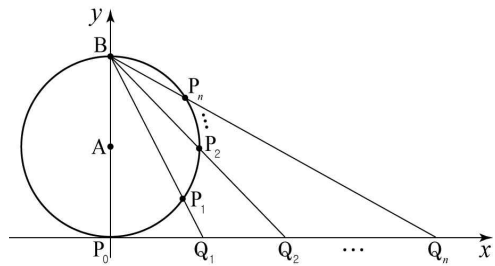
ㄱ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 일 때, $S(A) = \frac{3}{2}$

ㄴ. $A \in M$ 이면 $S(kA) = k^2 S(A)$ (단, k 는 양의 실수)

ㄷ. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $A \in M$ 이면 $S(A + mB) = S(A)$ (단, m 은 실수)

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 그림과 같이 중심이 $A(0, 1)$ 이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 P_n 과 x 축 위의 점 Q_n 은 다음 규칙을 만족한다.



- (가) 점 P_0 은 원점이고, 점 P_n 은 제 1사분면의 점이다.
(나) 호 $P_{n-1}P_n$ 의 길이를 l_n 이라 할 때, $l_{n+1} = r l_n$ 이다.
(다) 점 Q_n 은 점 $B(0, 2)$ 와 점 P_n 을 이은 직선이 x 축과 만나는 점이다.

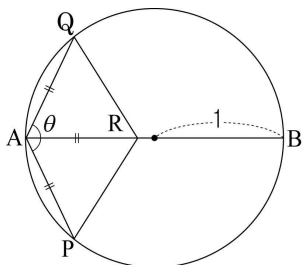
$Q_2(2, 0)$ 이고 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{8}{15}\pi$ 일 때, 상수 r 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

17. x 에 대한 방정식 $\left| \frac{3x-6}{x-1} \right| = k + \sqrt{k-x}$ 가 서로 다른 두 실근 α, β 를 갖도록 하는 상수 k 에 대하여 $\alpha\beta \leq 0$ 를 만족시키는 k 의 최댓값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

18. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 위에 한 점 A가 있다. $\overline{AP} = \overline{AQ} = \overline{AR}$ 이 되는 원 위의 두 점 P, Q, 지름 AB 위의 점을 R라 하자. $\angle PAQ = \theta$ 에 대하여 사각형 APRQ의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{S(\theta)}{\tan \theta}$ 의 값은? [4점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

19. 수열 $\{a_n\}$ 이

$$T_n = 2a_1 + 3a_2 + \cdots + (n+1)a_n = \frac{n}{2n+4} \quad (\text{단, } n = 1, 2, 3, \dots)$$

을 만족할 때, 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2} - T_n \quad \dots\dots (\star)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(i) $n = 1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = a_1 = \boxed{(\text{가})}$$

$$(\text{우변}) = \frac{1}{(1+1)^2} - T_1 = \boxed{(\text{가})}$$

이므로 $(\star)$ 이 성립한다.

(ii) $n = m$ 일 때, $(\star)$ 이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^m \frac{1}{(k+1)^2} - T_m$$

이다. $n = m+1$ 일 때, $(\star)$ 이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} a_k &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{(k+1)^2} - T_m + a_{m+1} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{(k+1)^2} - T_m + \boxed{(\text{나})} (T_{m+1} - T_m) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{(k+1)^2} - T_{m+1} + \frac{m+3}{m+2} (T_{m+1} - T_m) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{(k+1)^2} - T_{m+1} + \frac{1}{(m+2)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{(k+1)^2} - T_{m+1} \end{aligned}$$

그러므로 $n = m+1$ 일 때도 $(\star)$ 이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $(\star)$ 이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 α , (나)에 알맞은 식을 $f(m)$ 이라 할 때, $\frac{\alpha}{f(2)}$ 의 값은? [3점]

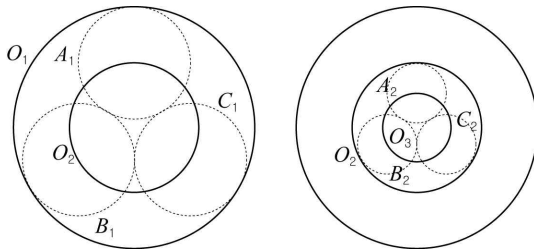
① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2 - (n+k)^2}}$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{\pi}{12}$ ② $\frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

21. 반지름의 길이가 3인 원 O_1 이 있다. 그림과 같이 원 O_1 에 내접하고 서로 외접하게 그린 반지름의 길이가 같은 세 원 A_1, B_1, C_1 의 중심을 지나는 원을 O_2 라 하자. 원 O_2 에 내접하고 서로 외접하게 그린 반지름의 길이가 같은 세 원 A_2, B_2, C_2 의 중심을 지나는 원을 O_3 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 그런 원 O_n 의 둘레의 길이를 l_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 의 값은?

[4점]



- ① $(5+4\sqrt{3})\pi$ ② $(6+4\sqrt{3})\pi$ ③ $(7+4\sqrt{3})\pi$
 ④ $(8+4\sqrt{3})\pi$ ⑤ $(9+4\sqrt{3})\pi$

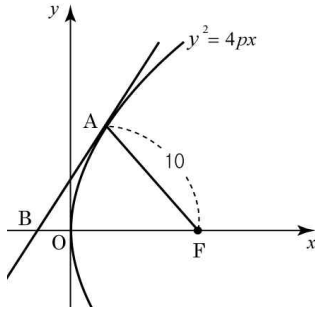
단답형(22 ~ 30)

22. 분수방정식 $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2+x+1} = \frac{2x+1}{x^3-1}$ 의 근을 α 라 할 때, 10α 의 값을 구하시오. [3점]

23. 정팔각형의 꼭짓점 중 임의의 세 점을 택하여 만든 삼각형이 직각삼각형일 때, 그 삼각형이 이등변삼각형일 확률을 $\frac{q}{p}$ 라 하자. 이때, $10p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

24. 한 변의 길이가 $12\sqrt{3}$ 인 정삼각형과 그 정삼각형에 내접하는 원으로 이루어진 도형이 있다. 이 도형에서 정삼각형의 각 변의 길이가 매초 $3\sqrt{3}$ 씩 늘어남에 따라 원도 정삼각형에 내접하면서 반지름의 길이가 늘어난다. 정삼각형의 한 변의 길이가 $24\sqrt{3}$ 이 되는 순간, 정삼각형에 내접하는 원의 넓이의 시간(초)에 대한 변화율이 $a\pi$ 이다. 이때, 상수 a 의 값을 구하시오. [4점]

25. 그림과 같이 포물선 $y^2 = 4px$ 의 초점을 F라 하고, $\overline{FA} = 10$ 을 만족하는 포물선 위의 점 $A(a, b)$ 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 ABF의 넓이가 40일 때, ab 의 값을 구하시오. (단, $a < p$ 이다.) [4점]



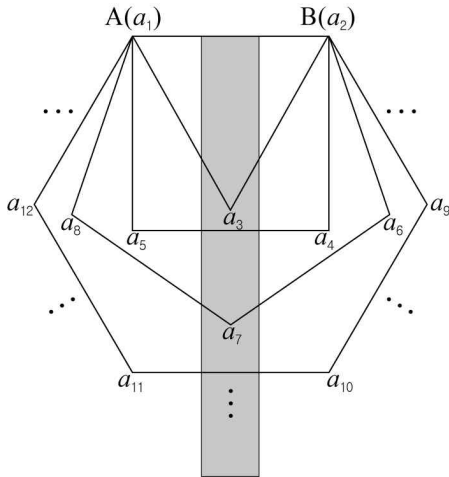
26. 좌표평면 위의 점 (x, y) 를 x 축에 대하여 대칭이동시키는 일차변환을 f , 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{3}$ 만큼 회전이동시키는 일차변환을 g 라 하자. 합성변환 h 를 $h = f \circ g \circ f$ 라 할 때, 합성변환 h^{2011} 에 의하여 점 $(2, 2)$ 가 옮겨지는 점은 (a, b) 이다. 이때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. (단, $h^1 = h$, $h^{n+1} = h^n \circ h$ 이다.) [4점]

27. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 집합 $Y = \{4, 5, 6, 7\}$ 로의 함수 f 중 다음 조건을 만족하는 함수의 개수를 구하시오. [3점]

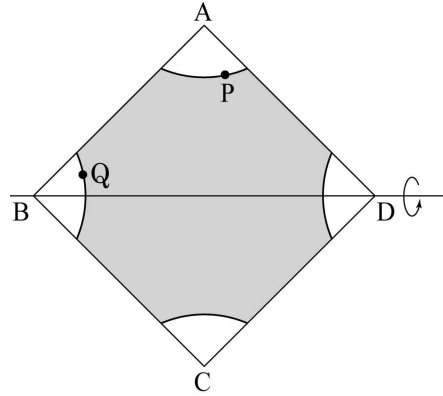
- (가) $f(2) = 5$
 (나) 집합 X 의 임의의 두 원소 i, j 에 대하여
 $i < j$ 이면 $f(i) \leq f(j)$

28. 순서대로 읽은 수와 거꾸로 읽은 수가 일치하는 자연수를 대칭수라 한다. 예를 들어 345543은 대칭수이고, 345567은 대칭수가 아니다. 0과 1만을 이용하여 n 자리 대칭수를 만들 때, 사용된 1의 개수가 0의 개수보다 많은 n 자리 대칭수의 개수를 a_n 이라 하자. 이때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{300}{a_{4n}}$ 의 값을 구하시오. [4점]

29. 그림과 같이 선분 AB를 한 변으로 하는 정 n 각형을 차례로 그린다. 등차수열 $\{a_k\}$ 에 대하여 선분 AB의 양 끝점에 각각 a_1, a_2 를 대응시키고, 정삼각형의 꼭짓점 중 점 A, B를 제외한 꼭짓점에 a_3 , 정사각형의 꼭짓점 중 점 A, B를 제외한 두 꼭짓점에 a_4, a_5 를 대응시킨다. 이와 같은 과정을 계속하여 정 n 각형의 꼭짓점 중 점 A, B를 제외한 꼭짓점에 시계방향으로 a_k 를 대응시킨다. $a_1 + a_2 + a_3 = 3$, $a_1 + a_2 + a_6 + a_7 + a_8 = 33$ 일 때, 어두운 부분에 배열된 숫자들 중 정십오각형의 꼭짓점에 대응되는 수를 구하시오. [4점]



30. 그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 정사각형 ABCD 내부의 점 P, Q는 $|\overline{PA} - \overline{PC}| = 2\sqrt{2}$, $|\overline{QB} - \overline{QD}| = 2\sqrt{2}$ 를 만족하며 움직인다. 점 P, Q가 나타내는 곡선과 정사각형으로 둘러싸인 어두운 부분을 직선 BD를 회전축으로 하여 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피가 $\frac{a+b\sqrt{2}}{3}\pi$ 이다. 이때, $a-b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 정수이다.) [4점]



* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.