수리 영역 (가 형)

제 2 교시

성명		수험번호						3				

○ 자신이 선택한 유형(‘가’형 / ‘나’형)의 문제지인지 확인하시오.
○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 기입하시오.
○ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 쓰고, 또 수험번호와 답을 정확히 표기하시오.
○ 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표기하시오.
○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

---

1. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $AB+B$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

2. $\log_4(\sqrt{2^7}\times 4^{\frac{1}{4}})$의 값은? [2점]

① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$　④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

3. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-2x}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{e^2}$　② $\frac{1}{e}$　③ 1　④ e　⑤ e^2

4. 두 실수 x, y가 $x+y=\frac{\pi}{3}$를 만족시킬 때, $\sqrt{3}\cos x+2\sin y$의 최댓값은? [3점]

① $\sqrt{7}$　② 3　③ $\sqrt{11}$　④ $\sqrt{13}$　⑤ $\sqrt{15}$

5. 방정식 $2x^2+2x-1+\sqrt{x^2+x-1}=2$ 의 모든 실근의 곱은? [3점]

① $-\frac{5}{4}$　② $-\frac{3}{4}$　③ $-\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{3}{4}$

6. 수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+n+1\ (n=1,2,3,\cdots)$$

을 만족시킬 때, a_{15} 의 값은? [3점]

① 66　② 78　③ 91　④ 105　⑤ 120

7. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n=n^2+3n+1$ 일 때, a_1+a_6 의 값은? [3점]

① 17　② 18　③ 19　④ 20　⑤ 21

8. 함수 $f(x)=2\ln(5-x)+\frac{1}{4}x^2$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

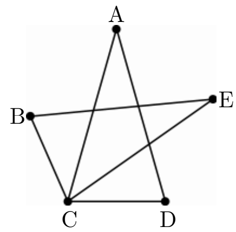
ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 극댓값을 갖는다.

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 개수는 2 이다.

ㄷ. 방정식 $f(x)=\frac{1}{4}$ 의 실근의 개수는 1이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 다음은 꼭짓점이 5 개인 그래프를 행렬로 나타낸 것이다.



$$\Rightarrow \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ p & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 1 & 1 & q & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

꼭짓점 C에서 다른 한 꼭짓점을 지나 다시 꼭짓점 C로 돌아오는 방법의 수를 r라 할 때, 세 상수 p, q, r에 대하여 $p+q+r$의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

10. x, y에 대한 연립일차방정식 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$가 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가질 때, 모든 상수 k의 값의 합은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

11. 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $A-2B=E$이면 $AB=BA$이다.

ㄴ. A, B의 역행렬이 모두 존재하면 $A+B$의 역행렬이 존재한다.

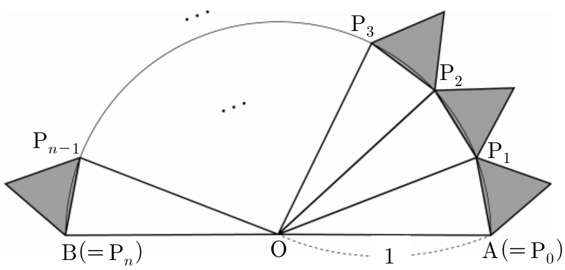
ㄷ. $(AB)^2=A^2B^2$이고 A의 역행렬이 존재하면 $A^{-1}B=BA^{-1}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 그림과 같이 중심각의 크기가 π이고 반지름의 길이가 1 인 부채꼴 OAB 에서 호 AB 를 n등분한 각 점(양 끝점도 포함)을 차례로

$\mathrm{A}=\mathrm{P}_0$, P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_{n-1}, $\mathrm{P}_n=\mathrm{B}$

라 하자. $\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}$, $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}$, $\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}$, $\cdots$, $\overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$을 각각 밑변으로 하는 정삼각형 n개의 넓이의 합을 $S(n)$이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot S(n)$의 값은? [3점]



① $\frac{\sqrt{2}}{8}\pi^2$ ② $\frac{\sqrt{6}}{8}\pi^2$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi^2$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{4}\pi^2$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{4}\pi^2$

13. 자연수 n 에 대하여 $f(n)=\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{3+5+7+\cdots+(2n+1)}$ 일 때,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

14. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=1,\ f(1)=2$
(나) $f'(x)>0,\ \ f''(x)>0$ (단, $0<x<1$)

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. 함수 $y=\{f(x)\}^2$ 의 그래프는 구간 $(0,\ 1)$에서 아래로 볼록하다.

ㄴ. $\displaystyle\int_0^1\{f(x)+f(1-x)\}dx<3$

ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\left\{f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}^2+\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^2}{2}\cdot\frac{1}{n}\geq\int_0^1\{f(x)\}^2dx$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 함수 $f(x)$가

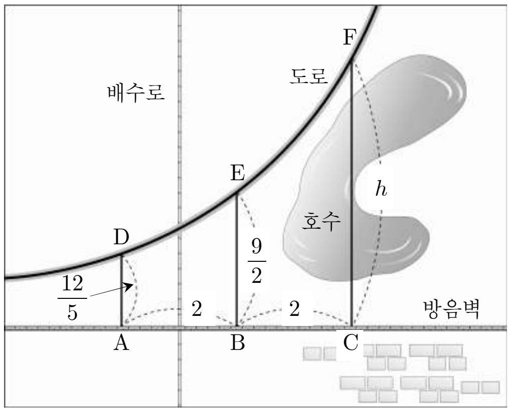
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2\sin 2x}{1-\cos x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

일 때, $f'(0)$의 값은? (단, $-\pi<x<\pi$) [3점]

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

16. 다음은 어느 지역의 방음벽, 배수로, 도로를 나타낸 평면도이다. 평면도에서 방음벽을 x 축, 방음벽과 수직으로 건설된 배수로를 y 축으로 할 때, 도로의 중앙선은 곡선 $y=a^x+2\,(a>1)$ 의 일부로 나타내어진다.

$\overline{AB}=\overline{BC}=2$ 를 만족시키는 x 축 위의 세 점 A, B, C 를 지나고 x 축에 수직인 세 직선을 그어 곡선 $y=a^x+2$ 와 만나는 점을 각각 D, E, F 라 하자. $\overline{AD}=\dfrac{12}{5}$, $\overline{BE}=\dfrac{9}{2}$, $\overline{CF}=h$일 때, 상수 h 의 값은? (단, 방음벽, 배수로, 도로의 중앙선의 폭은 무시한다.) [4점]



① $\frac{121}{8}$ ② $\frac{125}{8}$ ③ $\frac{137}{8}$
④ $\frac{141}{8}$ ⑤ $\frac{155}{8}$

17. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 10$이고,

$$a_{n+1} = a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \cdots + \frac{1}{n}a_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} - a_n = \left(a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \cdots + \frac{1}{n}a_n\right) - \left(a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \cdots + \frac{1}{n-1}a_{n-1}\right)$$ 이므로
>
> $a_{n+1} = \boxed{(가)} \times a_n$ 이다.
>
> $n = 2, 3, 4, \cdots, n-1$ 을 차례로 대입하면
>
> $a_3 = \frac{3}{2}a_2$
>
> $a_4 = \frac{4}{3}a_3$
>
> $\vdots$
>
> $a_n = \frac{n}{n-1}a_{n-1}$ 이므로
>
> $a_n = \boxed{(나)} \ (n \geq 2)$
>
> 따라서 주어진 수열 $\{a_n\}$의 일반항은
>
> $a_1 = 10$이고, $a_n = \boxed{(나)} \ (n \geq 2)$

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$이라 할 때, $f(5) \times g(10)$의 값은? [4점]

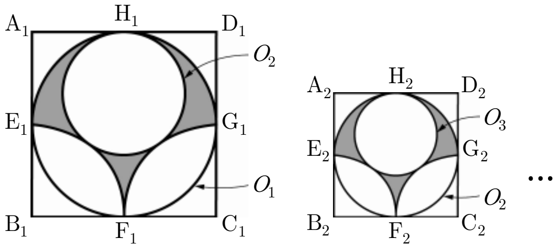
① 60 ② 75 ③ 90 ④ 105 ⑤ 120

18. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 O_1에 외접하는 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 네 변 A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1의 중점을 각각 E_1, F_1, G_1, H_1이라 하자.

점 B_1을 중심으로 하고 선분 B_1F_1을 반지름으로 하는 부채꼴 $B_1F_1E_1$의 호 E_1F_1과 점 C_1을 중심으로 하고 선분 C_1F_1을 반지름으로 하는 부채꼴 $C_1F_1G_1$의 호 G_1F_1과 원 O_1의 호 $E_1H_1G_1$로 둘러싸인 도형을 R_1이라 하자. R_1에 내접하는 원을 O_2라 하고 도형 R_1의 넓이에서 원 O_2의 넓이를 뺀 값을 S_1이라 하자.

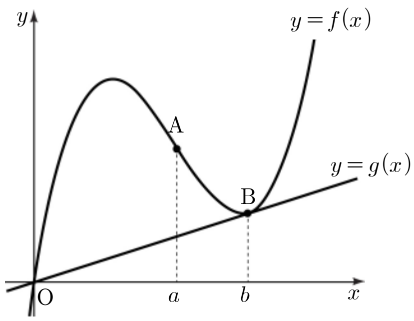
원 O_2에 외접하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 네 변 A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2, D_2A_2의 중점을 각각 E_2, F_2, G_2, H_2라 하자. 점 B_2를 중심으로 하고 선분 B_2F_2를 반지름으로 하는 부채꼴 $B_2F_2E_2$의 호 E_2F_2와 점 C_2를 중심으로 하고 선분 C_2F_2를 반지름으로 하는 부채꼴 $C_2F_2G_2$의 호 G_2F_2와 원 O_2의 호 $E_2H_2G_2$로 둘러싸인 도형을 R_2라 하자. R_2에 내접하는 원을 O_3이라 하고 도형 R_2의 넓이에서 원 O_3의 넓이를 뺀 값을 S_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호 E_nF_n, 호 G_nF_n, 호 $E_nH_nG_n$으로 둘러싸인 도형을 R_n이라 하고 R_n에 내접하는 원을 O_{n+1}이라 하자. 도형 R_n의 넓이에서 원 O_{n+1}의 넓이를 뺀 값을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{9-2\pi}{3}$ ② $\frac{18-4\pi}{5}$ ③ $\frac{9-2\pi}{2}$ ④ $\frac{18-4\pi}{3}$ ⑤ $9-2\pi$

19. 그림과 같이 좌표평면에서 최고차항의 계수가 양수이고 원점을 지나는 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 있다. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점을 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$라 하고 원점을 지나는 직선 $y=g(x)$가 점 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에서 곡선 $y=f(x)$에 접할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $0<a<b$) [4점]



〈보 기〉

ㄱ. 곡선 $y=f(x)-g(x)$의 변곡점의 x좌표는 a이다.

ㄴ. 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=\dfrac{b}{3}$에서 극댓값을 갖는다.

ㄷ. $\dfrac{b-a}{a}=\dfrac{1}{2}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

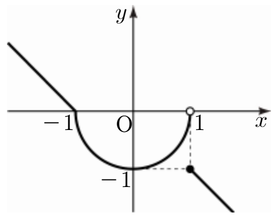
20. 매개변수 θ로 나타내어진 함수

$$x=\tan\theta,\ y=\cos^2\theta\ \left(단,\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

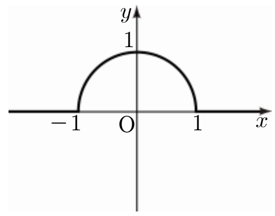
에 대하여 이 곡선 위의 점 $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① -1 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 0
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

21. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



$y=f(x)$



$y=g(x)$

〈보 기〉

ㄱ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

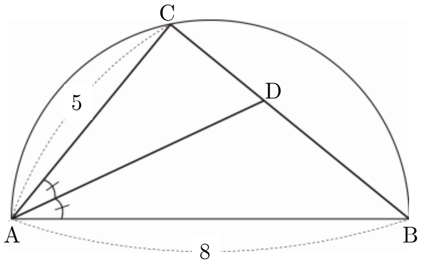
단답형

22. $0\le x\le\pi$일 때, x에 대한 방정식 $\cos 2x-2\cos x=k$가 실근을 갖도록 하는 상수 k의 최댓값을 구하시오. [3점]

23. 곡선 $y=2x^2+1$ 위의 점 $(-1,\ 3)$에서의 접선이 곡선 $y=2x^3-ax+3$에 접할 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

24. 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a\sqrt{x+2}+b}{x-2} & (x\neq 2) \\ 2 & (x=2) \end{cases}$ 가 $x=2$에서 연속일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $2a-b$의 값을 구하시오. [3점]

25. 그림과 같이 길이가 8인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 $\overline{\mathrm{AC}}=5$인 점 C가 있다. $\angle\mathrm{CAB}$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 할 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AD}}}=p\sqrt{3}$ 이다. $\dfrac{1}{p^2}$ 의 값을 구하시오. [3점]



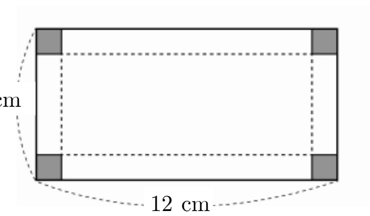
26. $\displaystyle\int_0^1 (1+2e^{-x})\,dx-\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ 의 값을 구하시오. [4점]

27. 수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_{2n-1} = a_{2n} = n\,(n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$$

을 만족시킬 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 수열 $\{S_n\}$ 에 대하여 첫째항부터 제 240항까지의 값 중에서 3 의 배수를 값으로 하는 모든 항의 개수를 구하시오. [4점]

28. [그림 1]과 같이 가로의 길이가 12 cm, 세로의 길이가 6 cm인 직사각형 모양의 종이가 있다. 네 모퉁이에서 크기가 같은 정사각형 모양의 종이를 잘라 낸 후 남는 부분을 접어서 [그림 2]와 같이 뚜껑이 없는 직육면체 모양의 상자를 만들려고 한다. 이 상자의 부피의 최댓값을 M cm^{3}이라 할 때, $\dfrac{\sqrt{3}}{3}M$ 의 값을 구하시오. (단, 종이의 두께는 무시한다.) [4점]



[그림 1]


[그림 2]

29. 세 자리 이하의 자연수 n 에 대하여

$$f(n) = 10(\log n - [\log n])$$

일 때, $[f(n)] \le 3$ 을 만족시키는 n 의 개수를 구하시오. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이고 $\log 2.51 = 0.3997$, $\log 2.52 = 0.4014$ 로 계산한다.) [4점]

30. x 에 대한 방정식 $\displaystyle\int_0^x |t-1|\,dt = x$ 의 양수인 실근이 $m + n\sqrt{2}$ 일 때, $m^3 + n^3$ 의 값을 구하시오. (단, m, n 은 유리수이다.) [4점]

※ 확인사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.