제 2 교시

수리 영역

'가'형 | 성명 | 수험 번호 3 | 1

◦ 자신이 선택한 유형('가'형/'나'형)의 문제지인지 확인하시오.
◦ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
◦ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.
◦ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면, 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
◦ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
◦ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $\log_3 12 - \log_3 \frac{4}{27}$ 의 값은? [2점]

① $\log_3 16$ ② $\log_3 21$ ③ 3 ④ 4 ⑤ $\log_3 90$

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $X+AB=B$ 를 만족시키는 행렬 X 의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-3x}{\sqrt{x+1}-2}$ 의 값은? [2점]

① 0 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

4. $0 \le x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $2\cos 2x = 1 + \cos x$ 의 모든 실근의 합은? [3점]

① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π ④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

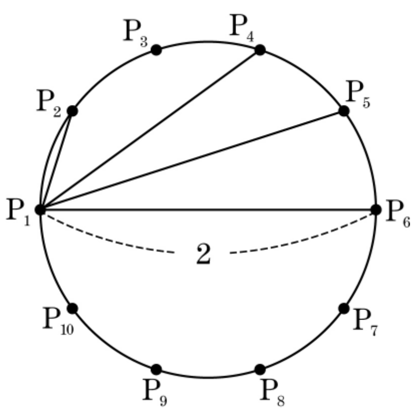
5. 삼차부등식 $(x-a^2+2a)(x-a^2+4a)(x-a^2+6a)>0$ 의 해가 $8<x<12$, $x>16$ 일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 2 ⑤ 4

6. 함수 $f(x)=(x-1)e^x\ (x>0)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(e^2,\ 2)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{2e^2}$ ② $\frac{1}{2e}$ ③ 1 ④ $2e$ ⑤ $2e^2$

7. 그림과 같이 지름의 길이가 2인 원이 있다. 원의 둘레를 10등분하여 각 등분점을 시계 방향으로 차례로 $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \cdots,\ \mathrm{P}_{10}$이라 할 때, 다음 중 $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}\cdot\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_4}\cdot\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_5}$의 값과 같은 것은? [3점]



① $2\sin\frac{\pi}{10}$ ② $\sin\frac{\pi}{5}$ ③ $2\sin\frac{\pi}{5}$
④ $\sin\frac{2}{5}\pi$ ⑤ $2\sin\frac{2}{5}\pi$

8. 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+5)=f(x)$
(나) $f(x)=\begin{cases} 2x+a & (-2\le x<1) \\ x^2+bx+3 & (1\le x\le 3)\end{cases}$

이때, $f(2011)$의 값은? [3점]

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

9. 양의 정수 n에 대하여 $\log n$의 지표를 $f(n)$, 가수를 $g(n)$이라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 양의 정수 n의 개수는? [3점]

(가) $f(3)<f(n)<f(2011)$
(나) $\{g(n)\}^2-g(n)+\log 2\cdot\log 5<0$

① 326 ② 328 ③ 330 ④ 332 ⑤ 334

10. 두 행렬

$$A=\begin{pmatrix}\log_2(x+1) & \log_2(y-3) \\ -1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1+\log_3 x & 1 \\ \log_3 y & 1\end{pmatrix}$$

에 대하여 A의 역행렬이 존재하지 않고, B의 역행렬도 존재하지 않을 때, 두 실수 x, y의 곱 xy의 값은? [3점]

① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5

11. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $A+B=E$, $AB=-E$가 성립할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $A^2+B^2=3E$

ㄴ. $A^{n+2}+B^{n+2}=A^{n+1}+B^{n+1}+A^n+B^n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

ㄷ. $A^9+B^9=76E$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. x에 대한 분수방정식 $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{a}{2x^2}$의 실근이 존재하지 않도록 하는 정수 a의 개수는? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

13. 액체의 끓는 온도 T(°C)와 증기압력 P(mmHg) 사이에

$$\log P=a+\frac{b}{c+T}\quad (a, b, c\text{는 상수이고 } T>-c)$$

인 관계가 성립한다. 표는 어떤 액체의 끓는 온도에 대한 증기압력을 나타낸 것이다.

끓는 온도(°C)	0	5	10
증기압력(mmHg)	4.8	6.6	8.8

이 표를 이용하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\log 2=0.301$로 계산한다.) [4점]

<보 기>

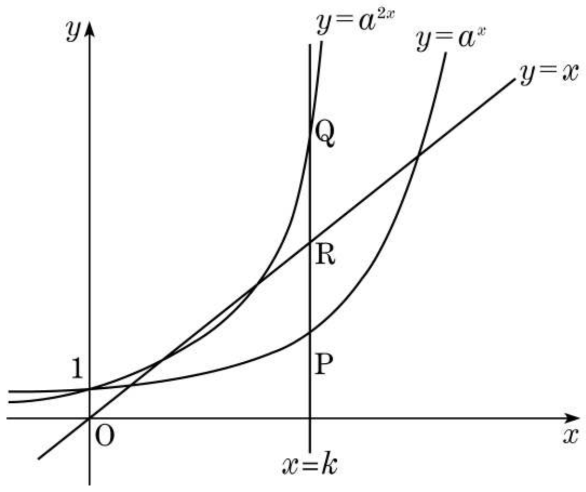
ㄱ. $0.602<a+\frac{b}{c}<0.699$

ㄴ. $b<0$

ㄷ. $P<10^a$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 그림과 같이 지수함수 $y=a^x$ 와 $y=a^{2x}$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 와 각각 서로 다른 두 점에서 만난다. $y=a^x$ 의 그래프, $y=a^{2x}$ 의 그래프와 직선 $x=k$ 의 교점을 각각 P, Q라 하고 직선 $y=x$ 와 직선 $x=k$ 의 교점을 R라 하자.



$k=2$ 이면 두 점 Q와 R가 일치할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a>1$) [4점]

<보 기>

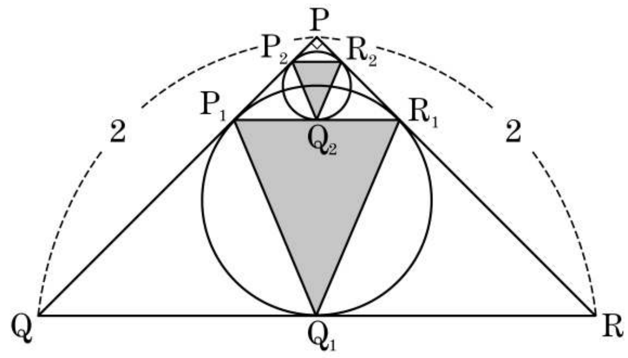
ㄱ. $k=4$ 이면 두 점 Q와 R가 일치한다.

ㄴ. $\overline{PQ}=12$ 이면 $\overline{QR}=8$ 이다.

ㄷ. $\overline{PQ}=\frac{1}{8}$ 을 만족시키는 실수 k 의 값의 개수는 2 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

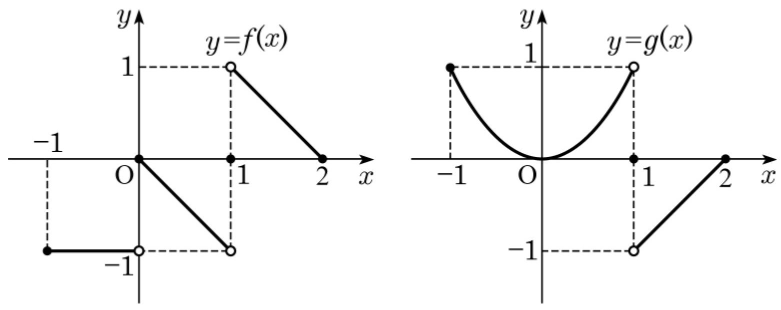
15. 그림과 같이 $\overline{PQ}=\overline{PR}=2$이고 $\angle QPR=90°$인 삼각형 PQR의 내접원과 세 변 PQ, QR, RP의 접점을 각각 P_1, Q_1, R_1이라 하자. 또, 삼각형 PP_1R_1의 내접원과 세 변 PP_1, P_1R_1, R_1P의 접점을 각각 P_2, Q_2, R_2라 하자.



이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 세 점 P_n, Q_n, R_n을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $P_nQ_nR_n$의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = p+q\sqrt{2}$ 를 만족시키는 두 유리수 p, q 의 합 $p+q$ 의 값은? [4점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

16. 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $\lim_{x \to -0} f(x) = -1$

ㄴ. 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $(f \circ g)(x)$는 열린구간 $(-1,\ 2)$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 다음은 자연수 n에 대하여 등식

$$\sum_{i=1}^{2n-1}\{i+(n-1)^2\}=(n-1)^3+n^3 \cdots\cdots(*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n=1$일 때, $1+0^2=0^3+1^3$ 이므로 $(*)$이 성립한다.

(2) $n=k$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하고,
$n=k+1$일 때 $(*)$이 성립함을 보이자.

$$\sum_{i=1}^{2k+1}(i+k^2) = \sum_{i=1}^{2k-1}\{i+(k-1)^2\}+\sum_{i=1}^{2k-1}(2k-1)+\boxed{(가)}$$

$$= \boxed{(나)}$$

그러므로 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.
따라서 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$, (나)에 알맞은 식을 $g(k)$라 할 때, $\dfrac{g(4)}{f(4)}$의 값은? [3점]

① $\dfrac{23}{7}$ ② $\dfrac{24}{7}$ ③ $\dfrac{25}{7}$ ④ $\dfrac{26}{7}$ ⑤ $\dfrac{27}{7}$

18. 곡선 $y=x^3-3x^2+2x$에 기울기가 m인 접선을 두 개 그었을 때, 두 접점을 P, Q라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, P, Q는 서로 다른 점이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. 두 점 P, Q의 x좌표의 합은 2이다.

ㄴ. $m>-1$

ㄷ. 두 접선 사이의 거리와 $\overline{PQ}$가 같아지는 실수 m이 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 자연수 n에 대하여 다음과 같이 제n행에 0과 1 사이의 유리수 중에서 분모는 2^n이고 분자는 홀수인 모든 수를 작은 것부터 차례로 나열하였다.

제1행 $\frac{1}{2}$

제2행 $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$

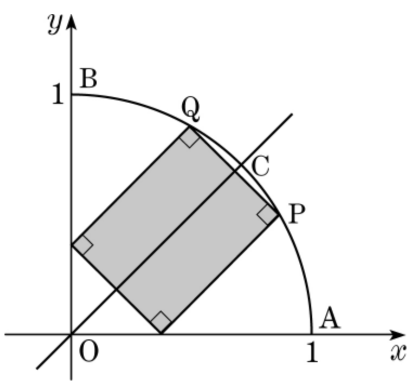
제3행 $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$

⋮ ⋮

제n행의 마지막 수를 a_n, 제n행의 모든 수의 합을 b_n이라 할 때 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{(2^n+1)a_n}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

20. 그림과 같이 좌표평면 위의 반지름의 길이가 1인 사분원 OAB에 대하여 각 AOB를 이등분하는 직선이 사분원과 만나는 점을 C라 하자. 두 점 P, Q는 점 C에서 동시에 출발하여 사분원의 둘레를 따라 각각 시계 방향, 시계 반대 방향으로 매초 $\frac{\pi}{36}$의 일정한 속력으로 움직인다. 두 점 P, Q가 점 C에서 출발하여 t초$(0<t<9)$가 되는 순간, 선분 PQ를 한 변으로 하고 사분원 OAB에 내접하는 직사각형의 넓이를 $S(t)$라 하자. 출발한 지 6초가 되는 순간, 넓이 $S(t)$의 시간(초)에 대한 변화율은? [4점]



① $\frac{1-\sqrt{3}}{36}\pi$ ② $\frac{1-\sqrt{3}}{72}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{3}-1}{72}\pi$
④ $\frac{\sqrt{3}-1}{36}\pi$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{36}\pi$

21. 좌표평면 위의 원점 O와 점 $\mathrm{P}_1(1, 0)$이 있다. 모든 자연수 n에 대하여 점 $\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 동경 OP_n이 나타내는 각의 크기는 $\frac{n-1}{3}\pi$이다.

(나) $\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}=\begin{cases} \frac{1}{2}\overline{\mathrm{OP}_n} & (y_n>0) \\ \overline{\mathrm{OP}_n} & (y_n=0) \\ \frac{4}{3}\overline{\mathrm{OP}_n} & (y_n<0) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{OP}_{50}}$의 값은? [4점]

① $\left(\frac{2}{3}\right)^8$ ② $\left(\frac{2}{3}\right)^{16}$ ③ $\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^7$
④ $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{14}$ ⑤ $\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^8$

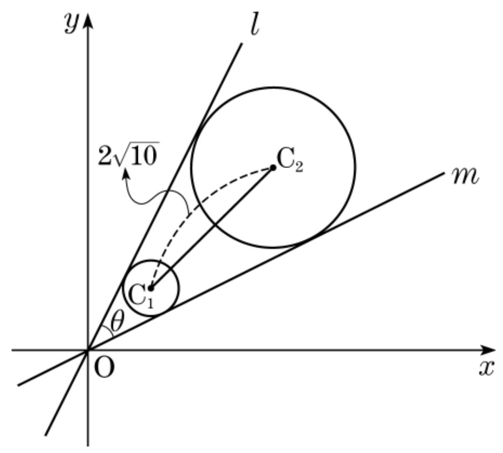
단답형

22. $\sqrt[n]{2}\times\sqrt[n]{8}=\sqrt[8]{2}$를 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오. [3점]

23. 방정식 $3^x-\sqrt{3^x+2}=4$의 실근을 α라 할 때, 9^α의 값을 구하시오. [3점]

24. $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{3}$ 일 때, $\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\beta+\cos\beta$ 의 최댓값을 M 이라 하자. M^2 의 값을 구하시오. [3점]

25. 그림과 같이 좌표평면 위의 원점을 지나는 서로 다른 두 직선 l, m 이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하자. 반지름의 길이가 1, 3 인 두 원 $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{C_2}$ 가 제1사분면 위에서 두 직선 l, m 에 동시에 접하고 $\overline{\mathrm{C_1C_2}}=2\sqrt{10}$ 일 때, $120\tan\theta$ 의 값을 구하시오. [3점]

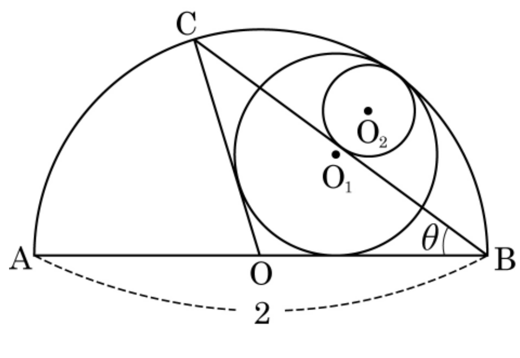


26. 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x, y 에 대하여
> $f(x+y)=f(x)f(y)+4f(x)+4f(y)+12$
> (나) $f(\ln 2)=0$, $f'(0)=2$

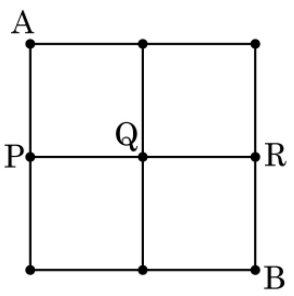
이때, $f'(\ln 2)$ 의 값을 구하시오. [3점]

27. 그림과 같이 길이가 2 인 선분 AB 를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB 의 중점 O 와 반원 위를 움직이는 점 C 에 대하여 부채꼴 OBC 에 내접하는 원을 $\mathrm{O_1}$, 현 BC 와 호 BC 로 둘러싸인 부분에 내접하는 원 중 반지름의 길이가 가장 큰 원을 $\mathrm{O_2}$ 라 하자. $\angle\mathrm{ABC}=\theta$ 라 하고 두 원 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$ 의 반지름의 길이를 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$ 라 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{g(\theta)}{\{f(\theta)\}^2}=\frac{q}{p}$ 이다. p^2+q^2 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



28. x 에 대한 방정식 $\cos x = \frac{1}{(2n-1)\pi}x$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$의 양의 실근의 개수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{24} \frac{500}{(a_n+1)(a_n+3)}$ 의 값을 구하시오. [4점]

29. 그림과 같은 그래프가 있다. 이 그래프의 꼭짓점 A 에서 꼭짓점 B 로 가는 경로 중에서 세 꼭짓점 P, Q, R 를 모두 지나는 것의 개수를 구하시오. [4점]



30. n차 정사각행렬 A 의 (i, j) 성분 a_{ij} 를

$$a_{ij}=(i-1)n+j \text{ (단, } 1 \le i \le n, \ 1 \le j \le n)$$

이라 하자. n 이하의 자연수 k 에 대하여 $f(k)$를 행렬 A 의 $(k, n-k+1)$ 성분이라 할 때, $12\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} f(k)}{n^3}$ 의 값을 구하시오. (단, n 은 자연수이다.) [4점]

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.