

제 2 교시

수리 영역

‘가’형

성명

수험 번호

3

1

- 자신이 선택한 유형(‘가’형/‘나’형)의 문제지인지 확인하시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.
- 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면, 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $\frac{1}{2} \log_3 6 - \log_9 2$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

2. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $2A = X - B$ 를 만족시키는 행렬 X 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} - 1}{(2^n + 1)(2^n - 1)}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

4. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $f(x) = \frac{(\cos x + \sin x)^2}{\sin 2x}$ 의 최솟값은? [3점]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

5. 무리방정식 $\sqrt{x+4} = |x|-2$ 의 모든 실근의 곱은? [3점]

- ① -15 ② -12 ③ -10 ④ -5 ⑤ 0

6. 다음 중 $\tan 10^\circ + \frac{1}{\tan 20^\circ}$ 의 값과 같은 것은? [3점]

- ① $\sin 10^\circ$ ② $\cos 20^\circ$ ③ $\frac{1}{\sin 20^\circ}$ ④ $\frac{1}{\cos 10^\circ}$ ⑤ $\frac{1}{\tan 10^\circ}$

7. 다항함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1$$

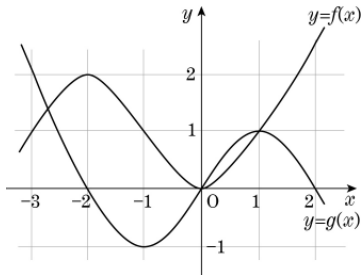
(나) $x = -1$ 과 $x = 2$ 에서 극값을 갖는다.

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{h}$ 의 값은? [3점]

- ① 8 ② 12 ③ 16 ④ 20 ⑤ 24

‘가’형

8. 두 다항함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$-3 \leq x \leq 2$ 에서 방정식

$$\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right\} \left\{ \frac{g(x)+1}{f(x)} - 1 \right\} = 0$$

의 실근의 개수는? [4점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

9. 원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t 에서의 위치 x_P, x_Q 는 다음과 같다.

$$x_P = t^2 - at, \quad x_Q = \ln(t^2 - t + 1)$$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이는 시각 t 의 범위가 $\frac{1}{2} < t < 2$ 일 때, 실수 a 의 값은? [3점]

- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

10. $80^x = 2$, $\left(\frac{1}{10}\right)^y = 4$, $a^z = 8$ 을 만족시키는 세 실수 x, y, z 에

대하여 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} = 1$ 이 성립할 때, 양수 a 의 값은? [3점]

- ① 32 ② 64 ③ 96 ④ 128 ⑤ 160

11. 역행렬을 갖는 이차정사각행렬 A 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A + A^{-1} = E$

(나) $A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

행렬 A 의 모든 성분의 합은? (단, E 는 단위행렬이다.) [4점]

- ① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

12. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $n < a_n < n+1$ 을 만족

시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n a_k$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

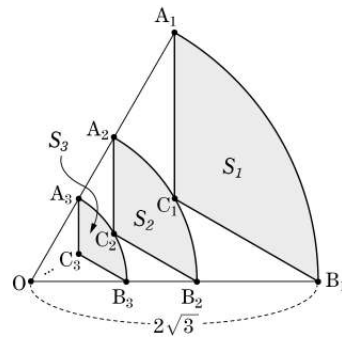
13. 그림과 같이 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$ 이고 $\angle A_1OB_1 = 60^\circ$ 인 부채꼴 A_1OB_1 이 있다.

세 점 A_1, O, B_1 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 A_1OB_1 의 무게중심을 C_1 이라 할 때, 두 선분 A_1C_1, B_1C_1 과 호 A_1B_1 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하자.

점 O 를 중심으로 하고 점 C_1 을 지나는 원이 두 선분 OA_1, OB_1 과 만나는 점을 각각 A_2, B_2 라 하자. 세 점 A_2, O, B_2 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 A_2OB_2 의 무게중심을 C_2 라 할 때, 두 선분 A_2C_2, B_2C_2 과 호 A_2B_2 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하자.

점 O 를 중심으로 하고 점 C_2 를 지나는 원이 두 선분 OA_2, OB_2 과 만나는 점을 각각 A_3, B_3 이라 하자. 세 점 A_3, O, B_3 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 A_3OB_3 의 무게중심을 C_3 이라 할 때, 두 선분 A_3C_3, B_3C_3 과 호 A_3B_3 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_3 이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 도형의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $2\pi - \sqrt{3}$ ② $2\pi - 2\sqrt{3}$ ③ $2\pi - 3\sqrt{3}$
 ④ $3\pi - 3\sqrt{3}$ ⑤ $3\pi - 4\sqrt{3}$

14. 신경세포 또는 근육세포와 같은 대부분의 세포에서는 흥분하지 않은 상태에서 세포의 외부와 내부의 전위차가 생기는데 이것을 휴지전위라고 한다. 세포의 외부와 내부의 칼륨이온 농도(단위는 mM)가 각각 $[K^+]_O$, $[K^+]_I$ 일 때의 휴지전위(단위는 mV)를 E_K 라 하면 등식

$E_K = t(\log[K^+]_O - \log[K^+]_I)$ (단, t 는 양의 상수이다.)가 성립한다. $[K^+]_O$, $[K^+]_I$, E_K 의 값이 표와 같을 때, 실수 q 의 값은? [3점]

$[K^+]_O$	$[K^+]_I$	E_K
a	b	p
$10a$	b	$p+60$
10^2a	$\sqrt{10}b$	$p+q$

- ① 90 ② 120 ③ 150 ④ 180 ⑤ 210

15. 열린 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

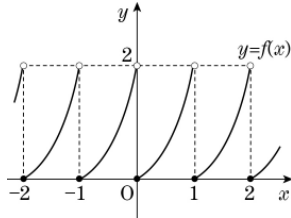
(가) $f'(x) = 1 + \{f(x)\}^2$

(나) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

함수 $g(x) = \ln f'(x)$ 에 대하여 $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

16. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 일부가 그림과 같을 때, 합성함수 $f(g(x))$ 가 $x=0$ 에서 연속이 되도록 하는 함수 $g(x)$ 를 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

㉠. $g(x)=x^2$ ㉡. $g(x)=|\sin x|$ ㉢. $g(x)=\cos x$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

17. 일반항이 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ($n=1, 2, 3, \dots$)인 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_n 의 값이 6의 배수인 항들을 작은 것부터 차례로 나열한 수열을 $\{b_n\}$ 이라 할 때, 다음은 $\sum_{k=1}^{4n} b_k$ 를 구하는 과정이다.

$a_{n+12} - a_n = \boxed{\text{가}}$ 이므로 $a_{n+12} - a_n$ 은 6의 배수이다. ㉠

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{12}$ 중에서 6의 배수인 것은

$a_3 = 6, a_8 = 36, a_{11} = 66, a_{12} = 78$ 이므로

$b_1 = a_3, b_2 = a_8, b_3 = a_{11}, b_4 = a_{12}$ 이다. ㉡

㉠, ㉡에서

$$b_{4n-3} = a_{12n-9} = 6(4n-3)(3n-2)$$

$$b_{4n-2} = a_{12n-4} = 6(3n-1)(4n-1)$$

$$b_{4n-1} = \boxed{\text{나}}$$

$$b_{4n} = 6n(12n+1)$$

따라서 $\sum_{k=1}^{4n} b_k = \sum_{k=1}^n (\boxed{\text{다}}) = \boxed{\hspace{2cm}}$

위의 (가), (나), (다)에 들어갈 식을 각각 $f(n), g(n), h(k)$ 라 할 때, $f(1)+g(2)+h(1)$ 의 값은? [4점]

- ① 552 ② 558 ③ 564 ④ 570 ⑤ 576

18. 두 이차정사각행렬 A, B 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $BA + B = E$

(나) $A^2B = A + E$

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위 행렬이다.) [4점]

ㄱ. 행렬 B 의 역행렬이 존재한다.

ㄴ. $AB = BA$

ㄷ. 행렬 AB 의 모든 성분의 합은 -2 이다.

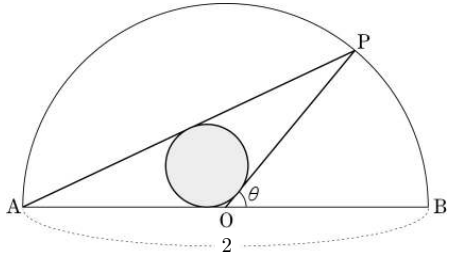
- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 함수 $f(x) = x|x| + |x-1|^3$ 에 대하여 $f'(0) + f'(1)$ 의 값은?

[4점]

- ① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

20. 그림과 같이 길이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 반원이 있다. 호 AB 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle POB = \theta$ 일 때, 삼각형 PAO에 내접하는 원의 넓이를 $f(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{f(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \pi$ 이다.) [4점]



- ① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{8}$ ④ $\frac{\pi}{16}$ ⑤ $\frac{\pi}{32}$

21. 자연수 n 에 대하여 다음 시행을 한다.

n 이 홀수이면 n 에서 1을 빼고,
 n 이 짝수이면 n 을 2로 나눈다.

자연수 n 이 1이 될 때까지 반복한 시행의 횟수를 a_n 이라 정의하자. 예를 들어 $a_7 = 4$, $a_8 = 3$ 이다. $S_n = \sum_{k=2^n}^{2^{n+3}} a_k$ 라 할 때, S_{50} 의 값은? (단, $a_1 = 0$ 이다.) [4점]

- ① 200 ② 201 ③ 202 ④ 203 ⑤ 204

단답형

22. 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 4$, $a_2 + a_3 = 17$ 일 때, a_4 의 값을 구하시오. [3점]

23. 곡선 $y = e^{3-x}$ 위의 점 $(3, 1)$ 에서의 접선 및 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. (단, e 는 자연로그의 밑이다.) [3점]

24. 최고차항의 계수가 양수인 다항함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{x^4} = 4$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^2}{x - 1} = 3$$

$f(10)$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. x 에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} x(x-2)(x+3) > 0 \\ \frac{x-n}{x+2} \leq 0 \end{cases}$$

을 만족시키는 정수 x 의 개수가 15가 되도록 하는 자연수 n 의 값을 구하시오. [3점]

26. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=1$, $a_2=1$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n+2} - a_{2n} = 1$

(나) $a_{2n+1} - a_{2n-1} = 0$

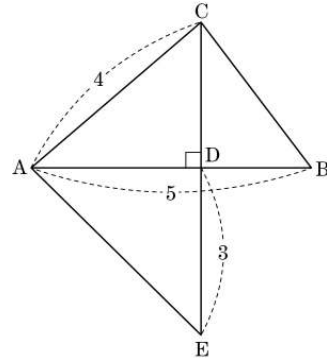
$a_{100} + a_{101}$ 의 값을 구하시오. [3점]

27. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때,

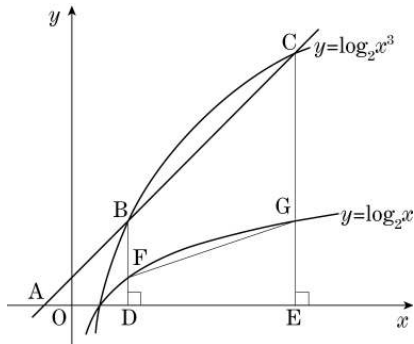
$$S_n = \frac{6n}{n+1} \text{ 이다. } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) \text{의 값을 구하시오. [4점]}$$

28. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=4$ 인 삼각형 ABC 가 있다. 꼭짓점 C 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발을 D 라 할 때, 선분 CD 의 연장선 위에 $\overline{DE}=3$ 을 만족시키는 점 E 를 잡는다. 두 삼각형 ABC , AED 의 넓이를 각각 S_1 , S_2 라 할 때, S_1+S_2 의 최댓값을 M 이라 하자. M^2 의 값을 구하시오. (단, 각 CAB 는 예각이다.)

[4점]



29. 그림과 같이 x 축 위의 한 점 A 를 지나는 직선이 곡선 $y = \log_2 x^3$ 과 서로 다른 두 점 B, C 에서 만나고 있다. 두 점 B, C 에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 D, E 라 하고, 두 선분 BD, CE 가 곡선 $y = \log_2 x$ 와 만나는 점을 각각 F, G 라 하자. $\overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 2$ 이고, 삼각형 ADB 의 넓이가 $\frac{9}{2}$ 일 때, 사각형 $BFGC$ 의 넓이를 구하시오. (단, 점 A 의 x 좌표는 0보다 작다.) [4점]



30. 함수 $f(x) = x^2(x-2)^2$ 이 있다. $0 \leq x \leq 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) \leq f'(t)(x-t) + f(t)$$

를 만족시키는 실수 t 의 집합은 $\{t \mid p \leq t \leq q\}$ 이다. $36pq$ 의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.