2013학년도 대학수학능력시험 대비

2012학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수리 영역 •

수리'가'형 정답

1	②	2	⑤	3	④	4	③	5	①
6	③	7	⑤	8	④	9	⑤	10	②
11	②	12	①	13	④	14	①	15	③
16	③	17	①	18	⑤	19	②	20	④
21	⑤	22	13	23	8	24	208	25	16
26	51	27	9	28	136	29	24	30	32

해 설

1. [출제의도] 로그의 밑을 같게 하여 로그의 계산을 한다.

$\frac{1}{2}\log_3 6-\log_9 2=\frac{1}{2}\log_3 6-\frac{1}{2}\log_3 2$

$=\frac{1}{2}(\log_3 6-\log_3 2)$

$=\frac{1}{2}\log_3 \frac{6}{2}$

$=\frac{1}{2}\log_3 3=\frac{1}{2}$

2. [출제의도] 행렬의 기본연산인 덧셈, 뺄셈, 실수배 등의 계산을 한다.

$2A=X-B$에서

$X=2A+B$

$=2\begin{pmatrix}1&-2\\2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&2\\-1&3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2&-4\\4&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&2\\-1&3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&-2\\3&1\end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은 3이다.

3. [출제의도] 무한등비수열의 극한값을 계산한다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-1}{(2^n+1)(2^n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-1}{4^n-1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4^n}}=4$

4. [출제의도] 삼각함수의 여러 가지 공식을 이용하여 함수의 최솟값을 구한다.

$f(x)=\frac{(\cos x+\sin x)^2}{\sin 2x}$

$=\frac{\sin 2x+1}{\sin 2x}$

$=1+\frac{1}{\sin 2x}$

$0<\sin 2x\le 1$이므로 $f(x)$의 최솟값은 2이다.

5. [출제의도] 무연근의 뜻과 무리방정식의 풀이 방법을 이해하여 무리방정식의 해를 구한다.

$\sqrt{x+4}=|x|-2$ ⋯ ㉠

주어진 식의 양변을 제곱하면

$x+4=x^2-4|x|+4$

(i) $x\ge 0$일 때

$x^2-5x=0,\ x(x-5)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=5$

㉠에 대입하면 $x=0$은 무연근이다. 따라서 구하는 근은 $x=5$이다.

(ii) $x<0$일 때

$x^2+3x=0,\ x(x+3)=0$

$\therefore\ x=-3$

따라서 (i), (ii)에서 모든 실근의 곱은 -15이다.

6. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 같은 값을 갖는 삼각함수를 찾는다.

$\tan 10^\circ+\frac{1}{\tan 20^\circ}=\frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}+\frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}$

$=\frac{\sin 10^\circ\sin 20^\circ+\cos 10^\circ\cos 20^\circ}{\cos 10^\circ\sin 20^\circ}$

$=\frac{\cos(20^\circ-10^\circ)}{\cos 10^\circ\sin 20^\circ}$

$=\frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ\sin 20^\circ}$

$=\frac{1}{\sin 20^\circ}$

7. [출제의도] 극값의 뜻을 이해하여 조건을 만족시키는 다항함수의 미분계수를 구한다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1$이므로 $f(x)$는 삼차함수이고 삼차항의 계수는 1이다. 따라서 $f'(x)$는 이차함수이고 이차항의 계수는 3이다.

$x=-1$과 $x=2$에서 극값을 가지므로 $f'(x)$는 $x+1$과 $x-2$를 인수로 갖는다.

따라서 $f'(x)=3(x+1)(x-2)$이다.

$\therefore\ \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(3+h)-f(3)\}-\{f(3-h)-f(3)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}$

$=2f'(3)=2\cdot 3\cdot 4\cdot 1=24$

8. [출제의도] 무연근과 그래프의 평행이동을 이해하여 분수방정식의 해의 개수를 구한다.

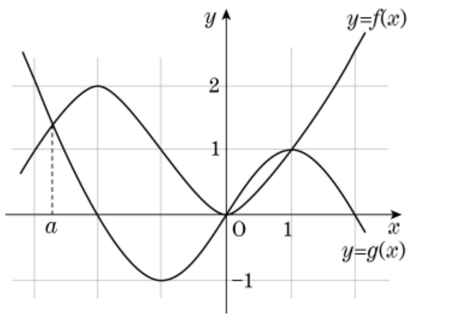
방정식 $\left\{\frac{f(x)}{g(x)}-1\right\}\left\{\frac{g(x)+1}{f(x)}-1\right\}=0$에서

$\frac{\{f(x)-g(x)\}\{g(x)-f(x)+1\}}{f(x)\,g(x)}=0$이므로

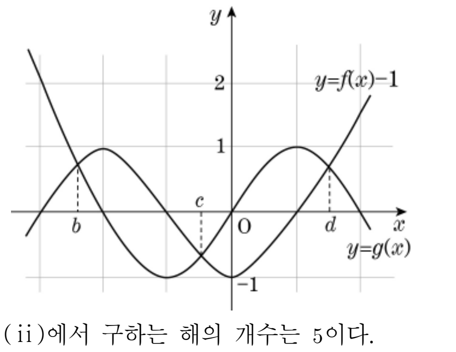
$f(x)-g(x)=0$ 또는 $g(x)-f(x)+1=0$,

$f(x)\ne 0,\ g(x)\ne 0$

(i) 방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 $x=a$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$이다. 그런데 $x=0$은 무연근이므로 구하는 해는 $x=a$ 또는 $x=1$이다.



(ii) 방정식 $g(x)=f(x)-1$의 해는 $x=b$ 또는 $x=c$ 또는 $x=d$이고 이들은 모두 무연근이 아니다.



(i), (ii)에서 구하는 해의 개수는 5이다.

9. [출제의도] 위치와 속도의 관계 및 속도의 부호의 의미를 이해하여 두 점이 서로 반대 방향으로 움직인 시각을 구한다.

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=\frac{dx_P}{dt}=2t-a$

$v_Q=\frac{dx_Q}{dt}=\frac{2t-1}{t^2-t+1}$

두 점 P, Q가 움직이는 방향이 서로 반대 방향이 되려면 $v_Pv_Q<0$이어야 한다.

$v_Pv_Q=\frac{(2t-a)(2t-1)}{t^2-t+1}<0$

$\therefore\ (2t-a)(2t-1)<0$ ⋯ ㉠ $(\because\ t^2-t+1>0)$

㉠의 해가 $\frac{1}{2}<t<2$이므로 $\frac{a}{2}=2$

$\therefore\ a=4$

10. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구한다.

$2^{\frac{1}{x}}=80$ ⋯ ㉠, $2^{\frac{2}{y}}=\frac{1}{10}$ ⋯ ㉡, $2^{\frac{1}{z}}=a^{\frac{1}{3}}$ ⋯ ㉢

㉠×㉡÷㉢ 하면

$2^{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}}=\frac{80\times\frac{1}{10}}{\sqrt[3]{a}}$

$\frac{80\times\frac{1}{10}}{\sqrt[3]{a}}=2,\ \sqrt[3]{a}=4$

$\therefore\ a=4^3=64$

[다른풀이]

$\frac{1}{x}=\log_2 80,\ \ \frac{1}{y}=\log_4\frac{1}{10},\ \ \frac{1}{z}=\log_8 a$

$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}=\log_2\frac{80\times\frac{1}{10}}{\sqrt[3]{a}}=1$

$2^1=\frac{80\times\frac{1}{10}}{\sqrt[3]{a}},\ \sqrt[3]{a}=4$

$\therefore\ a=4^3=2^6=64$

11. [출제의도] 행렬의 연산법칙과 역행렬의 뜻을 이해하여 행렬의 성분의 합을 구한다.

(가)에서 $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+A^{-1}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

(나)에서 $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}+A^{-1}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

$A^{-1}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

$\therefore\ A\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$로 놓으면

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$이므로

$2a+3b=3,\ 2c+3d=5$ ⋯ ㉠

$-a-2b=2,\ -c-2d=3$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=12,\ b=-7,\ c=19,\ d=-11$

$\therefore\ A=\begin{pmatrix}12&-7\\19&-11\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은 13이다.

[다른풀이1]

(가)에서 $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+A^{-1}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

(나)의 $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ ⋯ ㉠을 대입하면

$\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}+A^{-1}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$에서 $A^{-1}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

$\therefore\ A\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $A\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\5&3\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}3&2\\5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}^{-1}$

$=\begin{pmatrix}3&2\\5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&-7\\19&-11\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은 13이다.

[다른풀이2]

(가)의 양변에 행렬 A를 곱하면 $A^2+E=A$

$A^2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+E\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$에서 (나)의 $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ ⋯ ㉠을 대입하면 $A\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$

∴ $A\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $A\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-3\\-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&-7\\19&-11\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은 13이다.

12. [출제의도] $\sum$의 성질과 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.

$n<a_n<n+1$에서

$\sum_{k=1}^{n}k<\sum_{k=1}^{n}a_k<\sum_{k=1}^{n}(k+1)$이므로

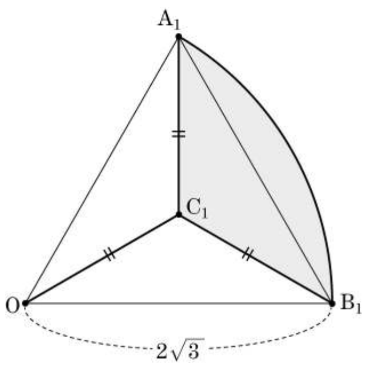
$\frac{n(n+1)}{2}<\sum_{k=1}^{n}a_k<\frac{n(n+3)}{2}$

$\frac{n(n+1)}{2n^2}<\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}a_k<\frac{n(n+3)}{2n^2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+3)}{2n^2}=\frac{1}{2}$

∴ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}$

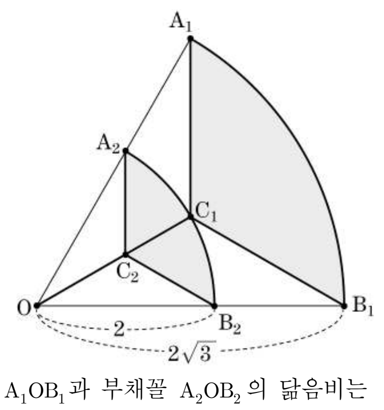
13. [출제의도] 도형의 닮음을 이용하여 무한급수의 합을 구한다.



점 C_1은 정삼각형 A_1OB_1의 무게중심이므로 삼각형 A_1OC_1의 넓이와 삼각형 C_1OB_1의 넓이는 각각 삼각형 A_1OB_1의 넓이의 $\frac{1}{3}$이다. 따라서 삼각형 C_1OB_1의 넓이는 $\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(2\sqrt{3})^2=\sqrt{3}$이다.

S_1은 부채꼴 A_1OB_1의 넓이에서 두 삼각형 A_1OC_1, C_1OB_1의 넓이를 뺀 값이므로

$S_1=\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{3})^2\cdot\frac{\pi}{3}-2\sqrt{3}=2\pi-2\sqrt{3}$



부채꼴 A_1OB_1과 부채꼴 A_2OB_2의 닮음비는 $2\sqrt{3}:2=\sqrt{3}:1$이므로 넓이의 비는 $3:1$이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $2\pi-2\sqrt{3}$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이다.

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{2\pi-2\sqrt{3}}{1-\frac{1}{3}}=3\pi-3\sqrt{3}$

14. [출제의도] 로그의 성질을 이해하여 로그로 나타내어진 실생활 문제를 해결한다.

$E_K=t\log\frac{[K^+]_O}{[K^+]_I}$이므로 $p=t\log\frac{a}{b}$

또, $p+60=t\left(1+\log\frac{a}{b}\right)$

$=t+t\log\frac{a}{b}$

$=t+p$

∴ $t=60$

따라서 $p+q=t\log\frac{10^2a}{\sqrt{10}\,b}$

$=t\left(\frac{3}{2}+\log\frac{a}{b}\right)$

$=\frac{3}{2}t+p$

∴ $q=\frac{3}{2}t=\frac{3}{2}\cdot60=90$

15. [출제의도] 로그함수의 미분법을 이해하여 미분계수를 구한다.

$g(x)=\ln f'(x)$

$=\ln(1+\{f(x)\}^2)$에서

$g'(x)=\frac{2f(x)f'(x)}{1+\{f(x)\}^2}$

$=\frac{2f(x)[1+\{f(x)\}^2]}{1+\{f(x)\}^2}$

$=2f(x)$

∴ $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot1=2$

[다른풀이]

$g(x)=\ln f'(x)$이므로

$g'(x)=\frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{2f(x)f'(x)}{f'(x)}=2f(x)$

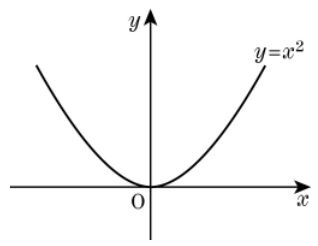
∴ $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot1=2$

[참고]

함수 $y=\tan x$는 주어진 조건을 만족시킨다.

16. [출제의도] 함수의 연속의 뜻을 이해하여 주어진 함수의 연속 여부를 판정한다.

ㄱ.



$x\to0$일 때 $g(x)\to+0$이므로

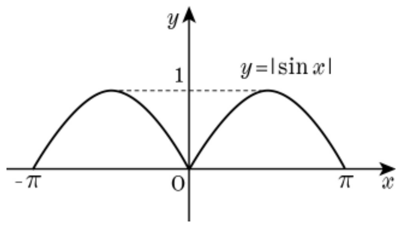
$\lim_{x\to0}f(g(x))=\lim_{t\to+0}f(t)=0$

$f(g(0))=f(0)=0$

따라서 $\lim_{x\to0}f(g(x))=f(g(0))=0$이므로

함수 $f(g(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ.



$x\to0$일 때 $g(x)\to+0$이므로

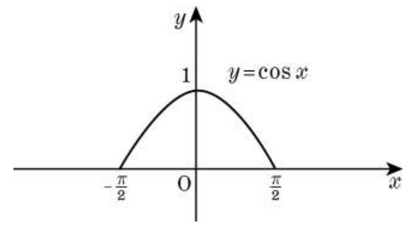
$\lim_{x\to0}f(g(x))=\lim_{t\to+0}f(t)=0$

$f(g(0))=f(0)=0$

따라서 $\lim_{x\to0}f(g(x))=f(g(0))=0$이므로

함수 $f(g(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ.



$x\to0$일 때, $g(x)\to1-0$이므로

$\lim_{x\to0}f(g(x))=\lim_{t\to1-0}f(t)=2$

$f(g(0))=f(1)=0$

따라서 $\lim_{x\to0}f(g(x))\neq f(g(0))$이므로

함수 $f(g(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.

이상에서 $x=0$에서 연속인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

17. [출제의도] 증명 과정을 이해하여 빈 칸에 들어갈 식을 구한다.

$a_{n+12}-a_n=\frac{(n+12)(n+13)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}$

$=6(2n+13)$

$b_{4n-3}=a_{12n-9}=6(4n-3)(3n-2)$

$b_{4n-2}=a_{12n-4}=6(3n-1)(4n-1)$

$b_{4n-1}=a_{12n-1}=6n(12n-1)$

$b_{4n}=a_{12n}=6n(12n+1)$

∴ $\sum_{k=1}^{4n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(b_{4k-3}+b_{4k-2}+b_{4k-1}+b_{4k})$

$=\sum_{k=1}^{n}6(48k^2-24k+7)$

$=6(16n^3+12n^2+3n)$

따라서 $f(n)=6(2n+13)$, $g(n)=6n(12n-1)$, $h(k)=6(48k^2-24k+7)$이므로

$f(1)+g(2)+h(1)=90+276+186=552$

18. [출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 행렬의 성질에 대한 명제의 참·거짓을 판정한다.

ㄱ. 조건 (가)에서 $B(A+E)=E$이므로 B의 역행렬은 $A+E$이다. (참)

ㄴ. ㄱ에서 $B^{-1}=A+E$이므로

$AB=(B^{-1}-E)B$

$=E-B$

$=B(B^{-1}-E)$

$=BA$ (참)

ㄷ. $AB=BA$이므로 (나)에서

$A^2B=A(AB)=A(BA)$

$=A(E-B)=A-AB=A+E$

∴ $AB=-E$

따라서 행렬 AB의 모든 성분의 합은 -2이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[참고]

$B(A+E)=E$에서 역행렬의 정의에 의해 $(A+E)B=E$가 성립한다.

∴ $AB=BA$

19. [출제의도] 도함수의 성질을 이해하여 절댓값을 포함하는 함수의 미분계수를 구한다.

$g(x)=x|x|$, $h(x)=|x-1|^3$으로 놓으면

두 함수 $g(x)$, $h(x)$는 실수 전체에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$도 실수 전체에서 미분가능하다.

$g'(0)=0$, $h'(1)=0$이고

$x>0$일 때 $g(x)=x^2$,

$x<1$일 때 $h(x)=-(x-1)^3$이므로

$f'(0)=0+h'(0)=-3(0-1)^2=-3$

$f'(1)=g'(1)+0=2\cdot1=2$

∴ $f'(0)+f'(1)=-3+2=-1$

[다른풀이1]

$f(x)=x|x|+|x-1|^3$에서 $f(0)=1$, $f(1)=1$

$\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h|h|+|h-1|^3-1}{h}$

$= \lim_{h\to+0}\frac{h^2-(h-1)^3-1}{h} = \lim_{h\to+0}\frac{-h^3+4h^2-3h}{h}$

$= \lim_{h\to+0}(-h^2+4h-3) = -3$

$\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to-0}\frac{h|h|+|h-1|^3-1}{h}$

$= \lim_{h\to-0}\frac{-h^2-(h-1)^3-1}{h} = \lim_{h\to-0}\frac{-h^3+2h^2-3h}{h}$

$= \lim_{h\to-0}(-h^2+2h-3) = -3$

$\therefore\ f'(0) = -3$

$\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$= \lim_{h\to+0}\frac{(1+h)|1+h|+|1+h-1|^3-1}{h}$

$= \lim_{h\to+0}\frac{(1+h)^2+|h|^3-1}{h}$

$= \lim_{h\to+0}\frac{h^3+h^2+2h}{h} = \lim_{h\to+0}(h^2+h+2) = 2$

$\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$= \lim_{h\to-0}\frac{(1+h)|1+h|+|1+h-1|^3-1}{h}$

$= \lim_{h\to-0}\frac{(1+h)^2+|h|^3-1}{h} = \lim_{h\to-0}\frac{-h^3+h^2+2h}{h}$

$= \lim_{h\to-0}(-h^2+h+2) = 2$

$\therefore\ f'(1) = 2$

$\therefore\ f'(0)+f'(1) = -3+2 = -1$

[다른풀이2]

$$f(x) = \begin{cases} x^2+(x-1)^3 & (x\ge 1) \\ x^2-(x-1)^3 & (0\le x<1) \\ -x^2-(x-1)^3 & (x<0) \end{cases}$$

이므로

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+3(x-1)^2 & (x>1) \\ 2x-3(x-1)^2 & (0<x<1) \\ -2x-3(x-1)^2 & (x<0) \end{cases}$$

$\lim_{x\to+0} f'(x) = 2\cdot 0-3(0-1)^2 = -3$

$\lim_{x\to-0} f'(x) = -2\cdot 0-3(0-1)^2 = -3$

$\therefore\ f'(0) = -3$

$\lim_{x\to1+0} f'(x) = 2\cdot 1+3(1-1)^2 = 2$

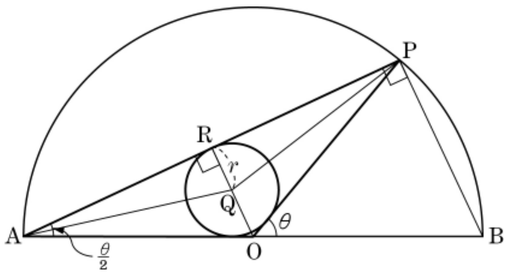
$\lim_{x\to1-0} f'(x) = 2\cdot 1-3(1-1)^2 = 2$

$\therefore\ f'(1) = 2$

이상에서 $f'(0)+f'(1) = -3+2 = -1$

20. [출제의도] 삼각함수의 극한과 도형의 성질을 이용하여 함수의 극한값을 구한다.

삼각형 PAO에 내접하는 원의 중심을 Q, 반지름의 길이를 r라 하자.



$\triangle AOP = \triangle AOQ + \triangle OPQ + \triangle PAQ$이므로

$\frac{1}{2}\cdot\overline{AO}\cdot\overline{OP}\cdot\sin(\pi-\theta) = \frac{r}{2}\cdot\overline{AO} + \frac{r}{2}\cdot\overline{OP} + \frac{r}{2}\cdot\overline{PA}$

$\therefore\ \sin\theta = r(2+\overline{PA})$ ⋯ ㉠

직각삼각형 ABP에서

$\overline{PA} = \overline{AB}\cos\frac{\theta}{2} = 2\cos\frac{\theta}{2}$ ⋯ ㉡이므로

㉠, ㉡에 의하여 $r = \frac{\sin\theta}{2+2\cos\frac{\theta}{2}}$이다.

따라서 $f(\theta) = \pi r^2 = \frac{\pi\sin^2\theta}{\left(2+2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}$이므로

$\lim_{\theta\to+0}\frac{f(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta\to+0}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\frac{\pi}{\left(2+2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}$

$= \lim_{\theta\to+0}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\lim_{\theta\to+0}\frac{\pi}{\left(2+2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}$

$= 1^2\cdot\frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{16}$

[다른풀이]

삼각형 PAO에 내접하는 원의 중심을 Q라 하고 원 Q와 변 AP의 접점을 R라 하면

$\overline{OR}\perp\overline{AP}$, $\overline{QR}\perp\overline{AP}$이다.

삼각형 AOR에서 $\angle RAO = \frac{\theta}{2}$이므로

$\overline{AR} = \overline{OA}\cos\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2}$

삼각형 AQR에서 $\angle RAQ = \frac{\theta}{4}$이므로

$\overline{QR} = \overline{AR}\tan\frac{\theta}{4} = \cos\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{4}$

따라서 $f(\theta) = \pi\overline{QR}^2 = \pi\cos^2\frac{\pi}{2}\tan^2\frac{\theta}{4}$이다.

$\therefore\ \lim_{\theta\to+0}\frac{f(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta\to+0}\frac{\pi\cos^2\frac{\theta}{2}\tan^2\frac{\theta}{4}}{\theta^2}$

$= \lim_{\theta\to+0}\frac{\pi\cos^2\frac{\theta}{2}\tan^2\frac{\theta}{4}}{\left(\frac{\theta}{4}\right)^2\cdot 16}$

$= \frac{\pi}{16}\lim_{\theta\to+0}\frac{\tan^2\frac{\theta}{4}}{\left(\frac{\theta}{4}\right)^2}\lim_{\theta\to+0}\cos^2\frac{\theta}{2}$

$= \frac{\pi}{16}\cdot 1^2\cdot 1^2 = \frac{\pi}{16}$

21. [출제의도] 조건을 만족시키는 수열을 추론하여 식의 값을 구한다.

2^n이 1이 될 때까지 시행이 n번 반복된다.

$\therefore\ a_{2^n} = n$

따라서 다음이 성립한다.

k	2^n	2^n+1	2^n+2	2^n+3
시행	2^{n-1}	2^n	$2^{n-1}+1$	2^n+2
	2^{n-2}	⋮	2^{n-1}	⋮
	⋮		⋮	
	1	1	1	1
a_k	n	$n+1$	$n+1$	$n+2$

따라서 $S_n = \sum_{k=2^n}^{2^n+3} a_k = 4n+4$이다.

$\therefore\ S_{50} = 204$

22. [출제의도] 등차수열의 뜻을 이해하여 등차수열의 항을 구한다.

$a_1+a_4 = a_2+a_3$이므로 $4+a_4 = 17$

$\therefore\ a_4 = 13$

[다른풀이1]

공차를 d라 하면

$a_2+a_3 = 17$에서 $2a_1+3d = 17$

$\therefore\ d = 3$

$\therefore\ a_4 = 13$

[다른풀이2]

$a_1+a_2+a_3 = 21$이므로 $3a_2 = 21$

$\therefore\ a_2 = 7$

$a_1 = 4$, $a_2 = 7$이므로 공차는 3이다.

$\therefore\ a_4 = 13$

23. [출제의도] 지수함수의 미분법을 이해하여 접선의 방정식을 구한다.

$y' = e^{3-x}(3-x)' = -e^{3-x}$이므로

(접선의 기울기) $= -e^{3-3} = -e^0 = -1$

따라서 접선의 방정식은 $y-1 = -(x-3)$, $y = -x+4$

접선의 x절편과 y절편은 각각 4이므로

구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times4 = 8$이다.

24. [출제의도] 극한의 성질을 이해하여 조건을 만족시키는 다항함수를 구한다.

조건 (가)에서 $f(x)$는 이차함수임을 알 수 있다.

$f(x) = ax^2+bx+c$로 놓으면

$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^4} = \lim_{x\to\infty}\frac{(ax^2+bx+c)^2}{x^4} = a^2 = 4$

$\therefore\ a = 2$ ($\because a>0$)

조건 (나)에서

$f(x)-x^2 = (2x^2+bx+c)-x^2$

$= x^2+bx+c$

$= (x-1)(x-c)$

$\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)-x^2}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-c)}{x-1}$

$= 1-c = 3$

$\therefore\ c = -2$, $b = 1$

따라서 $f(x) = 2x^2+x-2$이므로 $f(10) = 208$

25. [출제의도] 고차부등식과 분수부등식의 풀이 방법을 이해하여 연립부등식의 해를 구한다.

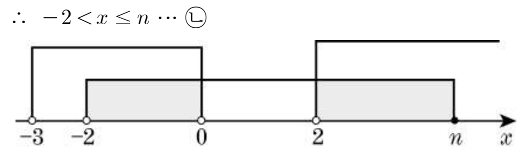
$x(x-2)(x+3) > 0$에서

$-3 < x < 0$ 또는 $x > 2$ ⋯ ㉠

$\frac{x-n}{x+2} \le 0$에서

$(x-n)(x+2) \le 0$, $x \ne -2$

$\therefore\ -2 < x \le n$ ⋯ ㉡



㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$-2 < x < 0$ 또는 $2 < x \le n$이므로

만족시키는 정수 x는 -1, 3, 4, 5, ⋯, n으로

$(n-1)$개이다.

따라서 $n-1 = 15$이므로 $n = 16$이다.

26. [출제의도] 조건을 만족시키는 수열을 추론하여 항의 값을 구한다.

수열 $\{a_n\}$의 각 항을 구하면 다음과 같다.

$a_3 = a_1 = 1$, $a_5 = a_3 = 1$, $a_7 = a_5 = 1$, ⋯

$\therefore\ a_{2n-1} = 1$

$a_4 = a_2+1 = 2$, $a_6 = a_4+1 = 3$, $a_8 = a_6+1 = 4$, ⋯

$\therefore\ a_{2n} = n$

따라서 $a_{100}+a_{101} = 50+1 = 51$이다.

27. [출제의도] 수열의 합 S_n과 일반항 a_n의 관계를 이해하여 무한급수의 합을 구한다.

$S_n = \frac{6n}{n+1}$에서

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= \frac{6n}{n+1} - \frac{6(n-1)}{n}$

$= \frac{6n^2-6(n^2-1)}{n(n+1)}$

$= \frac{6}{n(n+1)}$ $(n\ge 2)$

$a_1 = S_1 = 3$이므로 $a_n = \frac{6}{n(n+1)}$ $(n\ge 1)$

$\therefore\ a_n + a_{n+1} = \frac{6}{n(n+1)} + \frac{6}{(n+1)(n+2)}$

$= 6\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) + 6\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$= 6\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1}) = 6\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$= 6\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$$=6\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=6\left(1+\frac{1}{2}\right)=9$$

[다른풀이1]

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{n+1}=6$$
$$\lim_{n\to\infty}S_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+6}{n+2}=6$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k+a_{k+1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(S_n+S_{n+1}-a_1)$$
$$=\lim_{n\to\infty}S_n+\lim_{n\to\infty}S_{n+1}-a_1$$
$$=6+6-3=9\ \ (\because a_1=S_1=3)$$

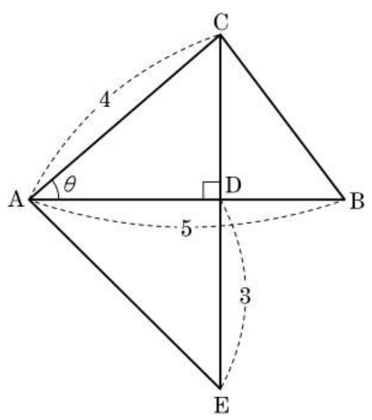
[다른풀이2]

$$a_n+a_{n+1}=(S_n-S_{n-1})+(S_{n+1}-S_n)$$
$$=S_{n+1}-S_{n-1}$$
$$=\frac{6(n+1)}{n+2}-\frac{6(n-1)}{n}$$
$$=\frac{6n(n+1)-6(n-1)(n+2)}{n(n+2)}$$
$$=\frac{12}{n(n+2)}$$
$$=6\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)(n\geq 2)$$

$a_1+a_2=S_2=4$이므로

$$a_n+a_{n+1}=6\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)(n\geq 1)$$

28. [출제의도] 도형의 성질과 삼각함수의 합성을 이용하여 최댓값을 구한다.



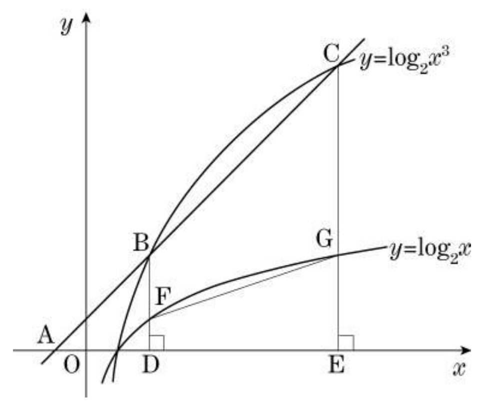
$\angle\mathrm{CAB}=\theta$라 하면 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\sin\theta,\ S_2=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cos\theta$$
$$S_1+S_2=10\sin\theta+6\cos\theta$$
$$=\sqrt{136}\sin(\theta+\alpha)$$
$$\left(\cos\alpha=\frac{10}{\sqrt{136}},\ \sin\alpha=\frac{6}{\sqrt{136}}\right)$$

따라서 S_1+S_2의 최댓값은 $\sqrt{136}$이다.

$\therefore\ M^2=136$

29. [출제의도] 로그함수와 도형의 성질을 이용하여 도형의 넓이를 구한다.

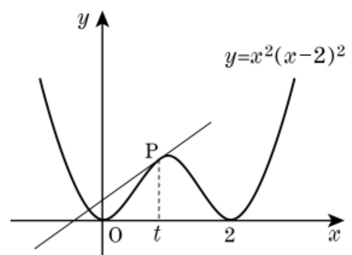


$$\log_2 x^3-\log_2 x=3\log_2 x-\log_2 x$$
$$=2\log_2 x$$

이므로 두 점 F, G는 두 선분 BD, CE를 각각 $2:1$로 내분하는 점이다.

$$\therefore\ \square\mathrm{BFGC}=\frac{2}{3}\times\square\mathrm{BDEC}$$
$$=\frac{2}{3}(8\times\triangle\mathrm{ADB})$$
$$=\frac{16}{3}\times\frac{9}{2}$$
$$=24$$

30. [출제의도] 주어진 함수의 그래프에서 접선이 곡선보다 위쪽에 놓이도록 하는 접점의 범위를 구한다.



직선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$는 곡선 위의 점 $\mathrm{P}(t, f(t))$에서의 접선이므로 접선이 주어진 곡선의 위쪽에 놓이려면 접점은 곡선이 위로 볼록한 부분의 점이다.

그런데 위로 볼록한 부분에 있는 점에서의 접선 중에는 구간 $[0, 2]$에서 $y=f(x)$의 그래프 아래쪽을 지나는 직선이 생길 수 있다.

그러므로 원점에서 그은 접선의 접점과 점 $(2, 0)$에서 그은 접선의 접점의 x좌표를 조사하면 된다.

$y=x^2(x-2)^2$에서

$$y'=2x(x-2)^2+2x^2(x-2)$$
$$=4x(x-1)(x-2)$$

점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-a^2(a-2)^2=4a(a-1)(a-2)(x-a)$$

$x=0$, $y=0$을 대입하면

$$-a^2(a-2)^2=-4a^2(a-1)(a-2)$$
$$\therefore\ a=\frac{2}{3}$$

한편 곡선 $y=x^2(x-2)^2$은 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 점 $(2, 0)$에서 그은 접선의 접점의 x좌표를 b라 하면 $\frac{2}{3}+b=2$에서 $b=\frac{4}{3}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 실수 t의 값의 범위는 $\frac{2}{3}\leq t\leq\frac{4}{3}$이다.

$$\therefore\ 36pq=36\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}=32$$

수리'나'형 정답

1	②	2	⑤	3	④	4	⑤	5	①
6	③	7	②	8	②	9	④	10	②
11	②	12	①	13	④	14	①	15	③
16	③	17	①	18	⑤	19	③	20	④
21	⑤	22	13	23	98	24	70	25	36
26	51	27	9	28	23	29	24	30	462

해 설

1~3. '가'형과 동일

4. [출제의도] 역행렬의 성질을 이해하여 역행렬을 구한다.

$A^{-1}=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$이고 $\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}=2A^{-1}$이므로

$$\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}=2\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&2\\4&2\end{pmatrix}$$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은 14이다.

5. [출제의도] 수렴하는 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\lim_{n\to\infty}a_n$의 관계를 이용하여 극한값을 구한다.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-3}{a_n+1}=\frac{2\cdot 0-3}{0+1}=-3$$

6. [출제의도] 행렬로 나타내어진 연립방정식의 해가 무수히 많을 조건을 구한다.

$$\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\log x\\\log y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}\log x\\\log y\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1-k&2\\4&3-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\log x\\\log y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\ \cdots\ ㉠$$

이므로 ㉠이 $x=1$, $y=1$ 이외의 해를 가질 필요충분조건은 행렬 $\begin{pmatrix}1-k&2\\4&3-k\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않는 것이다.

따라서 $(1-k)(3-k)-2\cdot 4=0$에서 $k^2-4k-5=0$

$(k-5)(k+1)=0$, $k=5$ 또는 $k=-1$

따라서 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 4이다.

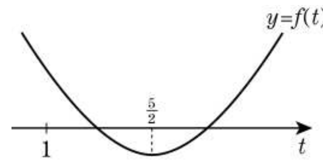
7. [출제의도] 지수방정식의 풀이 방법을 이해하여 두 양의 실근을 가질 조건을 구한다.

$5^x=t$로 치환하면 주어진 방정식은

$t^2-5t+k=0\ \cdots\ ㉠$

$x>0$이면 $t>1$이므로 주어진 방정식이 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면 ㉠이 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(t)=t^2-5t+k$라 놓으면 $y=f(t)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



$f(1)=1-5+k>0\ \cdots\ ㉡$

(판별식)$=25-4k>0\ \cdots\ ㉢$

㉡, ㉢에서 $4<k<\frac{25}{4}$, $k=5, 6$

따라서 구하는 정수 k의 개수는 2이다.

8. [출제의도] 등차중항의 뜻을 이해하여 로그방정식의 해를 구한다.

세 수 1, $\log_2(2^x+1)$, $\log_2(4^x-1)$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2\log_2(2^x+1)=1+\log_2(4^x-1)$$
$$(2^x+1)^2=2(4^x-1)$$
$$4^x-2\cdot 2^x-3=0$$
$$(2^x-3)(2^x+1)=0$$
$$2^x=3\ (\because\ 2^x>0)$$
$$\therefore\ \alpha=\log_2 3$$

그런데 $\log_2 2<\log_2 3<\log_2 4$이므로

$\therefore\ 1<\alpha<2$

9. [출제의도] 계차수열의 뜻을 이해하여 두 항의 차를 구한다.

$a_{n+1}-a_n=b_n$으로 놓으면

$$a_{10}-a_7=(a_{10}-a_9)+(a_9-a_8)+(a_8-a_7)$$
$$=b_9+b_8+b_7$$
$$=(2^4+9)+(2^3+8)+(2^2+7)$$
$$=52$$

10~14. '가'형과 동일

15. [출제의도] $\sum$의 성질을 이용하여 $\sum$로 나타내어진 방정식의 해를 구한다.

$\sum_{k=0}^{n}(x-k)^2=\sum_{k=1}^{n}(x+k)^2$에서

$$x^2+\sum_{k=1}^{n}(x-k)^2=\sum_{k=1}^{n}(x+k)^2$$

$$x^2+\sum_{k=1}^{n}\{(x-k)^2-(x+k)^2\}=0$$

$$x^2-\sum_{k=1}^{n}4kx=0,\ \ x^2-4x\sum_{k=1}^{n}k=0$$

$$x^2-4x\cdot\frac{n(n+1)}{2}=0$$

$x\neq 0$이므로 $x=2n(n+1)=a_n$

$\therefore\ a_{10}=20\cdot 11=220$

16. [출제의도] 지수와 로그의 성질을 이해하여 명제의 참·거짓을 판정한다.

ㄱ. $b=\frac{1}{2}$ 이면 $2^a=5^{\frac{1}{2}}$ 에서 $a=\log_2\sqrt{5}=\log_4 5$ (참)

ㄴ. $2^a=5^b$ 에서 $2^{\frac{a}{b}}=5$

$\therefore\ \frac{a}{b}=\log_2 5$

그런데 $\log_2 4<\log_2 5<\log_2 8$ 에서 $2<\log_2 5<3$ 이므로 $2<\frac{a}{b}<3$ (참)

ㄷ. (반례) $2^a=5^b=10$으로 놓으면

$2=10^{\frac{1}{a}}$, $5=10^{\frac{1}{b}}$ 에서 $\frac{1}{a}=\log 2$, $\frac{1}{b}=\log 5$

$\therefore\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log 2+\log 5=\log 10=1$ (유리수) (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[다른풀이]

ㄴ. $2^a=5^b$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$a\log 2=b\log 5$

$\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{\log 5}{\log 2}=\log_2 5$

[참고]

$2^a=5^b=k\ (k>1)$로 놓으면

$2=k^{\frac{1}{a}}$, $5=k^{\frac{1}{b}}$ 에서

$\frac{1}{a}=\log_k 2$, $\frac{1}{b}=\log_k 5$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_k 2+\log_k 5=\log_k 10$

이므로 $k=10^{\frac{n}{m}}$ (단, m, n은 자연수)일 때

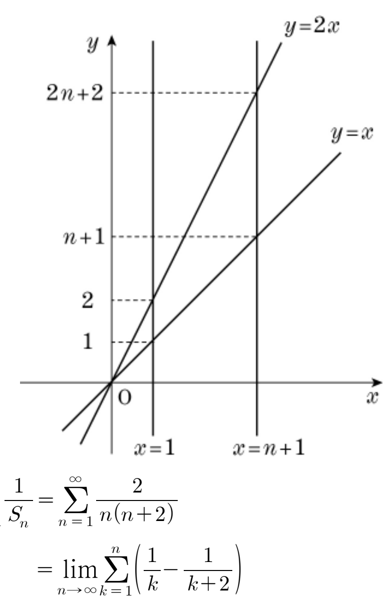
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$은 유리수이다.

17~18. '가'형과 동일

19. [출제의도] 도형의 넓이를 나타내는 수열을 구한 후 부분분수로 변형하여 무한급수의 합을 구한다.

네 직선 $x=1$, $x=n+1$, $y=x$, $y=2x$로 둘러싸인 사각형은 그림과 같이 평행한 두 변의 길이가 각각 1, $(n+1)$이고, 높이가 n인 사다리꼴이다.

$\therefore\ S_n=\frac{n(n+2)}{2}$



$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}$$

20. [출제의도] 상용로그의 지표의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구한다.

$[\log_3 n]=3$ 에서 $3^3\le n<3^4$ 이므로

$[\log 2n]=1$ 또는 $[\log 2n]=2$ 이다.

(i) $[\log 2n]=1$ 일 때 즉, $27\le n<50$ 일 때

(나)에서 $[2\log n]=3$이므로

$3\le 2\log n<4$, $\frac{3}{2}\le\log n<2$

$\therefore\ \log 10\sqrt{10}\le\log n<\log 100$, $10\sqrt{10}\le n<100$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 n은

$32\le n<50$ 이므로 자연수 n의 개수는 18 이다.

(ii) $[\log 2n]=2$ 일 때 즉, $50\le n<81$ 일 때

(나)에서 $[2\log n]=4$ 이므로

$4\le 2\log n<5$, $2\le\log n<\frac{5}{2}$

$\therefore\ \log 100\le\log n<\log 100\sqrt{10}$, $100\le n<100\sqrt{10}$

따라서 만족시키는 n의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 자연수 n의 개수는 18 이다.

[다른풀이]

$[\log_3 n]=3$ 에서 $27\le n<81$ ⋯ ㉠

㉠에서 $27\le n<32$ 일 때, n^2은 세 자리의 정수이므로 $[\log n^2]=2$ 이다.

$32\le n<81$ 일 때, n^2은 네 자리의 정수이므로

$[\log n^2]=3$ 이다.

또, $27\le n<50$ 일 때, $2n$은 두 자리의 정수이므로

$[\log 2n]=1$ 이다.

$50\le n<81$ 일 때, $2n$은 세 자리의 정수이므로

$[\log 2n]=2$ 이다.

위에서 (나)를 만족시키는 n의 값의 범위는

$32\le n<50$ 이다.

따라서 구하는 자연수 n의 개수는 18 이다.

21~22. '가'형과 동일

23. [출제의도] 지수법칙을 이해하여 식의 값을 구한다.

$\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=a+2+a^{-1}$이므로

$$a+a^{-1}=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2-2$$

$$=100-2=98$$

24. [출제의도] 로그의 성질을 이해하여 로그함수의 그래프를 평행이동시킨 그래프의 식을 구한다.

$$y=\log_3\left(\frac{x}{9}-1\right)$$

$$=\log_3\frac{x-9}{9}$$

$$=\log_3(x-9)-\log_3 9$$

$$=\log_3(x-9)-2$$

이므로 함수 $y=\log_3\left(\frac{x}{9}-1\right)$의 그래프는 함수

$y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 9만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동시킨 것이다.

따라서 $m=9$, $n=-2$

$\therefore\ 10(m+n)=70$

25. [출제의도] 그래프의 연결 관계를 나타내는 행렬의 뜻을 이해하여 그래프의 변의 개수를 구한다.

조건에 따라 행렬 P를 구하면 다음과 같다.

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}$$

그래프 G의 모든 변의 개수는 행렬 P의 모든 성분의 합의 $\frac{1}{2}$과 같으므로 $m=\frac{1}{2}\cdot 12=6$ 이다.

$\therefore\ m^2=36$

26~27. '가'형과 동일

28. [출제의도] 수렴하는 수열에 대한 극한의 성질을 이해하여 극한값을 구한다.

$c_n=2a_n-5b_n$ 이라 하면 $b_n=\frac{1}{5}(2a_n-c_n)$

$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=3$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+3b_n}{a_n+b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+3\cdot\frac{1}{5}(2a_n-c_n)}{a_n+\frac{1}{5}(2a_n-c_n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{16a_n-3c_n}{7a_n-c_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{16-3\cdot\frac{c_n}{a_n}}{7-\frac{c_n}{a_n}}$$

$$=\frac{16}{7}$$

$\therefore\ p+q=7+16=23$

[다른풀이]

$\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n-5b_n)=3$ 이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\left(2-5\cdot\frac{b_n}{a_n}\right)=3$에서

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ 이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-5\cdot\frac{b_n}{a_n}\right)=0$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{2}{5}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+3b_n}{a_n+b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+3\cdot\frac{b_n}{a_n}}{1+\frac{b_n}{a_n}}$$

$$=\frac{2+3\cdot\frac{2}{5}}{1+\frac{2}{5}}=\frac{16}{7}$$

$\therefore\ p+q=7+16=23$

29. '가'형과 동일

30. [출제의도] 조건을 만족시키는 수열을 추론하여 항의 값을 구한다.

점 P_n, Q_n의 좌표는 다음과 같다.

$\mathrm{P}_1(0,0)$, $\mathrm{Q}_1(1,1)$

$\mathrm{P}_2(0,2)$, $\mathrm{Q}_2(2,4)$

$\mathrm{P}_3(1,5)$, $\mathrm{Q}_3(4,8)$

$\mathrm{P}_4(3,9)$, $\mathrm{Q}_4(7,13)$

$\mathrm{P}_5(6,14)$, $\mathrm{Q}_5(11,19)$

$\mathrm{P}_6(10,20)$, $\mathrm{Q}_6(16,26)$

⋮

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 계차수열이 $\{n\}$인

수열이므로 $a_{21}=1+\sum\limits_{k=1}^{20}k=1+\frac{20\cdot 21}{2}=211$

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1, 계차수열이 $\{n+2\}$인 수열이므로

$$b_{21}=1+\sum_{k=1}^{20}(k+2)=1+\frac{20\cdot 21}{2}+2\cdot 20=251$$

$\therefore\ a_{21}+b_{21}=211+251=462$

[다른풀이]

$\mathrm{P}_1(0,0)$으로부터 $\mathrm{Q}_1(1,1)$이므로 $a_1=1$, $b_1=1$

Q_n의 좌표 (a_n, b_n)으로부터

P_{n+1}의 좌표는 (a_n-1, b_n+1)

Q_{n+1}의 좌표는 $(a_n-1+(n+1), b_n+1+(n+1))$

$\therefore\ a_{n+1}=a_n+n$, $b_{n+1}=b_n+n+2$

$a_{n+1}+b_{n+1}=a_n+b_n+2n+2$

수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 $a_1+b_1=2$,

계차수열이 $\{2n+2\}$인 수열이므로

$$a_{21}+b_{21}=2+\sum_{k=1}^{20}(2k+2)$$

$$=2+2\cdot\frac{20\cdot 21}{2}+2\cdot 20=462$$