

2012학년도 10월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수리 영역 •

수리 가형 정답

1	3	2	5	3	2	4	4	5	1
6	3	7	3	8	5	9	1	10	3
11	2	12	2	13	3	14	1	15	4
16	1	17	4	18	2	19	5	20	4
21	5	22	21	23	6	24	19	25	78
26	16	27	30	28	52	29	60	30	294

해설

1. [출제의도] 로그의 밑을 같게 하여 주어진 식을 계산한다.

$$\log_{\sqrt{3}} 2 + \log_3 \frac{\sqrt{3}}{4} = \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$$

2. [출제의도] 행렬의 성질을 이용하여 행렬의 합과 차를 계산한다.

$$(A+B) + (A-B) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은 $1+1+2+1=5$

3. [출제의도] 여러 가지 함수의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot \frac{2x}{3x} \right) = \frac{2}{3}$$

4. [출제의도] 여러 가지 함수의 미분법을 이해한다.

$$f'(x) = 2x + \ln x + 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-h)}{3h} \cdot 3 = 3f'(1) = 9$$

5. [출제의도] 쌍곡선의 점선의 방정식을 이해한다.

$$2x - \frac{3y}{3} = 1, y = 2x - 1$$

따라서 y축과 만나는 점의 y좌표는 -1

6. [출제의도] 삼각방정식을 이해한다.

$$\sin x + 2\sin x \cos x = 0, \sin x(1+2\cos x) = 0$$

$$\text{i) } \sin x = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = \pi$$

$$\text{ii) } \cos x = -\frac{1}{2} \text{에서 } x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi$$

$$\text{따라서 모든 근의 합은 } 0 + \pi + \frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi = 3\pi$$

7. [출제의도] 두 직선이 이루는 각을 이해한다.

모서리 DE와 모서리 CB가 평행하므로 두 모서리 AC와 DE가 이루는 각은 두 모서리 AC와 CB가 이루는 각과 같다. 따라서 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 이므로 $\cos \theta = \frac{1}{2}$

8. [출제의도] 조건부 확률을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

	남학생	여학생	계
전문문화 체험	130	90	220
수학 체험	100	80	180
계	230	170	400

이 학교 학생 400명 중에서 임의로 한 학생을 선택하였을 때, 수학 체험을 희망한 학생일 사건을 A라 하고, 여학생일 사건을 B라 하면

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{80}{400}}{\frac{180}{400}} = \frac{4}{9}$$

9. [출제의도] 치환적분을 이해한다.

$$2x = t \text{ 라 하면 } 2 = \frac{dt}{dx} \text{ 이므로}$$

$$\int_0^2 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t) dt = \frac{1}{2} \left[\int_0^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx \right] = \frac{1}{2} \{6 + (-2)\} = 2$$

10. [출제의도] 분수부동식과 함수의 그래프 사이의 관계를 이해한다.

$$\frac{g(x)}{f(x)} \geq 1 \text{ 에서 } f(x)g(x) \geq \{f(x)\}^2 \text{ 이고 } f(x) \neq 0$$

$$\therefore f(x)\{f(x) - g(x)\} \leq 0 \text{ 이고 } f(x) \neq 0$$

$$\text{i) } f(x) > 0 \text{ 이고 } f(x) \leq g(x) \text{ 인 경우}$$

$$f(x) > 0 \text{ 이면 } -6 < x < 0 \text{ 또는 } x > 6$$

$$f(x) \leq g(x) \text{ 이면 } x \leq -4 \text{ 또는 } 2 \leq x \leq 6$$

$$\therefore -6 < x \leq -4$$

$$\text{ii) } f(x) < 0 \text{ 이고 } f(x) \geq g(x) \text{ 인 경우}$$

$$f(x) < 0 \text{ 이면 } x < -6 \text{ 또는 } 0 < x < 6$$

$$f(x) \geq g(x) \text{ 이면 } -4 \leq x \leq 2 \text{ 또는 } x \geq 6$$

$$\therefore 0 < x \leq 2$$

따라서 구하는 정수는 -5, -4, 1, 2의 4개이다.

11. [출제의도] 이항분포와 정규분포 사이의 관계를 이해한다.

사과의 무게 X는 정규분포 $N(400, 50^2)$ 을 따른다.

1등급 상품이 될 확률은

$$P(X \geq 442) = P\left(Z \geq \frac{442 - 400}{50}\right) = P(Z \geq 0.84) = 0.2$$

사과 100개 중 1등급 상품의 개수 Y는 이항분포 $B(100, 0.2)$ 를 따르고 근사적으로 $N(20, 4^2)$ 을 따른다.

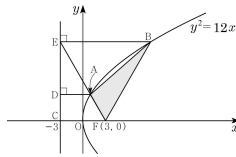
$$P(Y \geq 24) = P\left(Z \geq \frac{24 - 20}{4}\right) = P(Z \geq 1) = 0.16$$

12. [출제의도] 로그함수와 관련된 실생활 문제를 해결한다.

$$10 = C \log_{\frac{10}{6}} \frac{30-6}{30-10} \text{ 에서 } C = \frac{10}{\log 2}$$

$$T = \frac{10}{\log 2} \cdot \log \frac{15(30-6)}{6(30-15)} = 20$$

13. [출제의도] 포물선의 정의를 이용하여 도형과 관련된 문제를 해결한다.



$$\angle EFB = \frac{\pi}{3} \text{ 이고 } \overline{BF} = \overline{BE} \text{ 이므로 } \triangle BEF \text{ 는 정삼각형이다. } \overline{FC} = 6 \text{ 이므로 } \overline{FB} = \overline{FE} = 2\overline{FC} = 12$$

$$\overline{AF} = \overline{AD} \text{ 이고 } \angle DAE = \frac{\pi}{3} \text{ 이므로 } \overline{AE} = 2\overline{AD} = 2\overline{AF} \text{ 에서 } 3\overline{AF} = 12 \text{ 즉, } \overline{AF} = 4$$

$$\therefore \triangle AFB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

14. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 수열의 일반항을 구하는 과정을 설명한다.

$$a_{n+1} = 2a_n + n + 1 \text{ 에서 } n \text{ 에 } n+1 \text{ 을 대입하면}$$

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + n + 1 + 1 \text{ 이므로 } f(n) = n + 2$$

$$a_n = 1 + \frac{4(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} - (n - 1) = 2^{n+1} - n - 2 \text{ 이므로}$$

$$g(n) = -n - 2 \therefore f(5) - g(5) = 7 - (-7) = 14$$

15. [출제의도] 함수와 정적분의 관계를 이해한다.

$$(나) \text{에서 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt = k \text{ 라 두면 } g(x) = k \cos x + 3$$

$$(가) \text{에서 } x = 0 \text{ 을 대입하면 } -k = (k+3+a) \cdot 0 - 2 \text{ 이므로}$$

$$k = 2 \text{ 이고, } x = \frac{\pi}{2} \text{ 를 대입하면 } 0 = (3+a) \cdot 1 - 2 \text{ 이므로}$$

$$a = -1 \text{ 이다. 따라서 } g(x) = 2 \cos x + 3 \text{ 이므로}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t) dt = (2 \cos x + 2) \sin x - 2$$

$$f(x) = -2 \sin^2 x + (2 \cos x + 2) \cos x \therefore f(0) = 4$$

16. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 성질을 이용하여 도형과 관련된 문제를 해결한다.

두 사각형이 합동이고 두 점 P, Q가 직선 $y = x$ 위의 점이므로 $P(k, k), Q(2k, 2k)$ 이다.

$$\text{따라서 } a^k = k, a^{2k} = 2k \text{ 이므로 } 2k = a^{2k} = (a^k)^2 = k^2 \text{ 에서 } k = 2 \text{ 이다. } a^2 = 2 \therefore a = \sqrt{2}$$

17. [출제의도] 행렬의 성질을 추론한다.

$$ㄱ. A^2 B + AB^2 = A(A+B)B = E \text{ 에서 } B^{-1} = A(A+B)$$

$$\text{이므로 } BA(A+B) = E$$

$$\text{따라서 } (A+B)^{-1} = BA \text{ 로 존재한다. (참)}$$

$$ㄴ. A+B = E \text{ 이므로 } A(A+B)B = E \text{ 에서 } AB = E$$

$$A(E-A) = E, A^2 = A - E$$

$$A^3 = AA^2 = A(A-E) = A^2 - A = -E \text{ (거짓)}$$

$$ㄷ. BA(A+B) = E \text{ 에서 } BA^2 + BAB = E \text{ 이므로}$$

$$BA^2 + BAB = A^2 B + AB^2, BAB = AB^2$$

$$\text{양변의 오른쪽에 } B^{-1} \text{ 을 곱하면 } AB = BA \text{ (참)}$$

18. [출제의도] 삼수선의 정리를 이해한다.

$$\text{직각삼각형 } ABC \text{ 에서 } \overline{AB} = 2\sqrt{3}$$

점 B에서 $\overline{AF}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 ABP에서 $\overline{BH} = \sqrt{3}$

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{CH} \perp \overline{AP}$ 이다. 따라서 직각삼각형 CBH에서 $\overline{BC} = 2, \overline{BH} = \sqrt{3}$ 이므로 $\overline{CH} = \sqrt{7}$

19. [출제의도] 주어진 조건에 맞는 함수의 성질을 추론한다.

함수 $f(x)$ 의 증감표는 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
f'(x)	-	0	+	0	+	0	-
f(x)	↘		↗		↗		↘

$$ㄱ. f(x) \text{ 는 } x=0 \text{ 에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)}$$

ㄴ. $f(0)=0$ 이면 도함수 $f'(x)$ 는 y축에 대하여 대칭이므로 함수 $f(x)$ 는 원점 대칭이다. 따라서 극값 $f(1)$, 극값 $f(-1)$ 에 대하여 $f(1) = -f(-1)$ 이므로 $f(1) + f(-1) = 0$ 이다. (참)

ㄷ. 극값 $f(1)$ 이 0보다 작으므로 방정식 $f(x)=0$ 은 $x < -1$ 인 오직 하나의 실근을 갖는다. (참)

20. [출제의도] 여러 가지 함수의 극한을 이용하여 도형과 관련된 문제를 해결한다.

$$\overline{AB} = 2 \text{ 이고 } \angle APB = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } \overline{PB} = 2 \sin \theta$$

$$\angle QBP = \frac{\pi}{2} - \angle PQB = \frac{\pi}{2} - \theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \theta$$

$$\therefore \overline{PQ} = \overline{PB} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 2 \sin \theta \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$$

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \theta \cdot 2 \sin \theta \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 2 \sin^2 \theta \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{2 \sin^2 \theta \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow +0} 2 \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 2$$

21. [출제의도] 도형에서 무한등비급수의 합을 이해한다.

$$\text{직선 } y = \frac{1}{\sqrt{3}}x \text{ 와 } x \text{ 축이 이루는 각의 크기는 } \frac{\pi}{6} \text{ 이다. } \triangle OO_1A_1 \text{ 는 이등변삼각형이므로 } \angle OO_1A_1 = \frac{2}{3}\pi$$

따라서 $l_1 = \frac{2}{3}\pi$

$\triangle OO_n A_n$ 은 이등변삼각형이므로 $\angle OO_n A_n = \frac{2}{3}\pi$

따라서 $l_n = \frac{2}{3}\pi \cdot l_{n-1} \quad (n \geq 2)$

수열 $\left\{\frac{1}{l_n}\right\}$ 은 첫째항이 $\frac{3}{2\pi}$ 이고 공비가 $\frac{3}{2\pi}$ 인 등비

수열이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l_n} = \frac{\frac{3}{2\pi}}{1 - \frac{3}{2\pi}} = \frac{3}{2\pi - 3}$

22. [출제의도] 등차수열의 성질을 이해한다.

$a_n = 1 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 2$ 에서

$a_3 = 7, a_5 = 13$ 이므로 $a_1 + a_3 + a_5 = 21$

23. [출제의도] 무리방정식의 근을 구한다.

$2x - 3 = (x-3)^2, x^2 - 8x + 12 = 0, (x-6)(x-2) = 0$

$\therefore x = 6$ 또는 $x = 2$

$x = 2$ 가 무연근이므로 실근은 $x = 6$

24. [출제의도] 이산확률분포를 이해한다.

$a + 2a + 3a + 4a = 1$ 에서 $a = \frac{1}{10}$

$P(X=x) = \frac{1}{10}x, E(X) = \sum_{k=1}^4 k \cdot \frac{k}{10} = \frac{1}{10} \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6} = 3$

$\therefore E(4X+7) = 4E(X) + 7 = 12 + 7 = 19$

25. [출제의도] 일차변환과 역변환의 뜻을 이해한다.

일차변환 f 를 나타내는 행렬을 A 라 하면

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 이므로 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 이므로 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$A \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ 에서 $a = 7, b = 8$ 이므로 $10a + b = 78$

26. [출제의도] 포물선의 그래프를 이용하여 회전체의 부피를 구하는 문제를 해결한다.

두 곡선의 교점의 x 좌표는 $8(x-2) = 4x$ 에서 $x = 4$

$V = \pi \int_0^4 4x dx - \pi \int_2^4 8(x-2) dx = \pi [2x^2]_0^4 - \pi [4x^2 - 16x]_2^4$

$= 32\pi - 16\pi = 16\pi \quad \therefore \frac{V}{\pi} = 16$

27. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 도형과 관련된 문제를 해결한다.

원의 중심을 O 라 하면 $\angle POB = 2\theta$

직선 OP 과 선분 AC 가 만나는 점을 R , $\angle BAC = \alpha$ 라

하면 $\angle PRQ = \alpha + 2\theta$ 이고 $\tan \alpha = \frac{1}{3}$

$\angle QPR = \frac{\pi}{2}, \angle PQA = \frac{\pi}{4}$ 이므로 $\angle PRQ = \alpha + 2\theta = \frac{\pi}{4}$

$\tan 2\theta = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$

따라서 $60 \tan 2\theta = 30$

28. [출제의도] 평면과 구의 위치관계를 이용하여 벡터의 내적과 관련된 문제를 해결한다.

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP}) = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CP}$
 $= 6 \cdot 5 \cdot \frac{36+25-9}{2 \cdot 6 \cdot 5} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CP} = 26 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CP}$

그런데 최대일 때의 점 P 를 P_M , 최소일 때의 점 P 를 P_m 이라 하면 $\overrightarrow{CP_M}, \overrightarrow{CP_m}$ 은 $\overrightarrow{BA}$ 와 평행하고 방향이 반대이므로 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CP_M} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CP_m} = 0$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP}$ 의 최댓값과 최솟값의 합은 $26 + 26 = 52$

29. [출제의도] 입체도형의 형태를 추론하고 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구한다.

1층에 6개를 모두 쌓은 후 남은 6개를 쌓는 방법은 다음과 같다.

i) 2층 앞줄에 모두 1개씩 쌓는 경우

${}_4C_1 \times {}_3C_1 = 12$

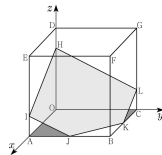
ii) 2층 앞줄 두 곳 중 한 곳에만 1개를 쌓는 경우
 뒷줄 네 곳 중 한 곳에 3개를 쌓고 나머지 세 곳에 중복을 허락하여 2개를 쌓으면 되므로

${}_2C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3H_2 = 48$

따라서 $12 + 48 = 60$

30. [출제의도] 평면과 평면의 위치관계와 정사영을 이용하여 도형과 관련된 문제를 해결한다.

평면 $x + y + 2z = 6$ 에 의하여 정육면체가 잘린 단면은 그림과 같다.



두 평면 $x + y + 2z = 6, z = 0$ 의 법선벡터가 각각 $(1, 1, 2), (0, 0, 1)$ 이므로 두 평면이 이루는 각 θ 에 대하여 $\sqrt{6} \cdot 1 \cdot \cos \theta = 2, \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{6}}$

오각형 HIJKL의 정사영이 오각형 OAJKC 이므로

$S \cos \theta = 14$

따라서 $S = 7\sqrt{6}$ 이므로 $S^2 = 294$