2012학년도 7월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

수리 영역

"나"형 정답

1	①	2	④	3	④	4	④	5	②
6	②	7	①	8	⑤	9	⑤	10	②
11	④	12	②	13	①	14	③	15	③
16	⑤	17	③	18	③	19	②	20	②
21	③	22	70	23	36	24	35	25	12
26	10	27	5	28	27	29	610	30	11

해설

1. [출제의도] 행렬 계산하기
$A^2 - AB = A(A-B) = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$
$\therefore$ 모든 성분의 합은 12

2. [출제의도] 로그 계산하기
$\left(\dfrac{3}{\log_2 2}\right)^3 + 8\log_2 2 = 35$

3. [출제의도] 지수부등식 계산하기
$3^{x^2} < 3^{x+2}$, $\quad x^2 < x+2$, $\quad x^2 - x - 2 < 0$
$-1 < x < 2$
$\therefore \alpha + \beta = 1$

4. [출제의도] 함수의 연속성 이해하기
$f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로
$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = k$이다.
$k = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}$
$= \lim\limits_{x\to 1}(x+2) = 3$
$\therefore \ k = 3$

5. [출제의도] 미분계수의 성질 이해하기
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h) - f(2-h)}{h}$
$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h) - f(2) - \{f(2-h) - f(2)\}}{h}$
$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$
$\quad - \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\{f(2-h) - f(2)\}}{-h} \times (-1)$
$= 2f'(2)$
$f'(x) = x^2 + 2x$ 이므로
$2f'(2) = 2(4+4) = 16$

6. [출제의도] 그래프와 행렬의 성질 이해하기
행렬 M^2의 $(i,\ i)$ 성분$(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$의 값의 합은 각 꼭짓점에 연결된 모든 변의 개수의 합의 2배이다. 따라서 그래프 G의 모든 변의 개수는 $\dfrac{4+2+2+2+2}{2} = 6$

7. [출제의도] 지수의 성질을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기
$G_1 = \dfrac{15}{14}(1.05)^{35}$, $G_2 = \dfrac{5}{14}(1.05)^{20}$
$\dfrac{G_1}{G_2} = 3(1.05)^{15} = 6$

8. [출제의도] 상용로그를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기
$75(0.997)^n = 80(0.995)^n$
$n(\log 0.997 - \log 0.995) = \log 80 - \log 75$
$n(-1 + 0.999 + 1 - 0.998) = 5\log 2 - \log 3 - 1$
$0.001 \times n = 0.028$
$\therefore n = 28$

9. [출제의도] 확률을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기
(i) $a = 3$일 때, $b = 1$ $\quad \dfrac{1}{6} \times {}_5C_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \dfrac{5}{192}$
(ii) $a = 6$일 때, $b = 2$ $\quad \dfrac{1}{6} \times {}_5C_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \dfrac{10}{192}$
$\therefore a = 3b$일 확률은 $\dfrac{5}{64}$

10. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기
$f(x) = f(x+4)$이므로 $f(0) = f(4)$이다.
$2 = 16 - 8 + a$
$a = -6$
$\int_9^{11} f(x)\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx$
$= \int_1^2 (-4x+2)\,dx + \int_2^3 (x^2 - 2x - 6)\,dx$
$= -\dfrac{26}{3}$

11. [출제의도] 여러 가지 수열의 합을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기
$x^2 - (n+1)x + n^2 = nx - n$
$x^2 - (2n+1)x + n(n+1) = 0$
$x = n\ ,\ n+1$
$a_n b_n = n(n+1)$
$\sum\limits_{n=1}^{19}\dfrac{100}{n(n+1)} = 100\sum\limits_{n=1}^{19}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$
$= 100\left(1 - \dfrac{1}{20}\right)$
$= 95$

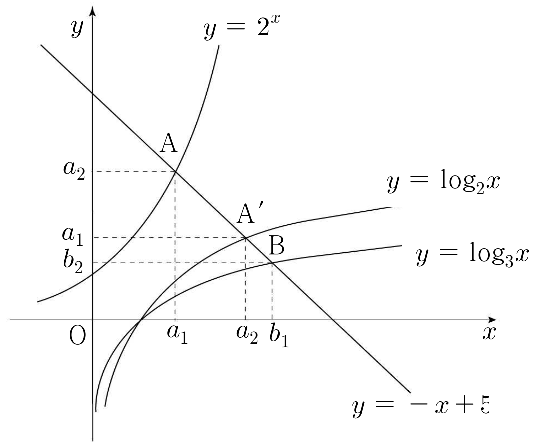
12. [출제의도] 미분계수 계산하기
$f'(x) = (x-2)(x-3)\cdots(x-10)$
$\quad + (x-1)(x-3)\cdots(x-10)$
$\quad \vdots$
$\quad + (x-1)(x-2)\cdots(x-9)$
$f'(1) = (1-2)(1-3)\cdots(1-10)$
$f'(4) = (4-1)(4-2)(4-3)(4-5)\cdots(4-10)$
$\dfrac{f'(1)}{f'(4)} = \dfrac{(-7)\times(-8)\times(-9)}{3\times 2\times 1} = -84$

(별해)
$f'(1) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$
$= \lim\limits_{x\to 1}\{(x-2)(x-3)(x-4)\cdots(x-10)\}$
$= -9!$
$f'(4) = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x) - f(4)}{x-4}$
$= \lim\limits_{x\to 4}\{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)\cdots(x-10)\}$
$= 3! \times 6!$
$\therefore \dfrac{f'(1)}{f'(4)} = -84$

13. [출제의도] 적분과 미분의 관계를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기
극한값의 성질에 의하여
$\int_1^1 f(t)\,dt - f(1) = 0$이므로 $f(1) = 0$,
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x f(t)\,dt - f(x)}{x^2 - 1}$
$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x f(t)\,dt}{x^2-1} - \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x) - f(1)}{x^2-1}$
$= \dfrac{f(1)}{2} - \dfrac{f'(1)}{2} = 2$
$\therefore \ f'(1) = -4$

14. [출제의도] 무한등비급수의 합을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기
수열 $\left\{\overset{\frown}{A_nB_n}\right\}$은 첫째항이 $3\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$이고 공비가 $\cos\theta$인 등비수열이다.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\overset{\frown}{A_nB_n} = \dfrac{3\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)}{1 - \cos\theta} = 9\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$
$\cos\theta = \dfrac{2}{3}$
$\overline{B_1C_1} = 3\sin\theta = \sqrt{5}$

15. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 성질을 이용하여 추론하기



ㄱ. $y = \log_2 x$와 $y = -x+5$가 만나는 점 $A'(a_2, a_1)$ $\therefore a_1 > b_2$ (참)
ㄴ. 두 점 A, B는 $y = -x+5$ 위의 점이므로 $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = 5$ (참)
ㄷ. 직선 OA'와 직선 OB의 기울기에 의해 $\dfrac{a_1}{a_2} > \dfrac{b_2}{b_1}$ (거짓)

16. [출제의도] 조건부확률을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

	전화조사	인터넷조사	합계
대상자(명)	10000	40000	50000
참여자(명)	7000	34000	41000

조사에 참여한 대상자를 임의로 한 명 선택하였을 때, 이 사람이 인터넷조사에 참여하였을 확률 P는
$P = \dfrac{34000}{41000} = \dfrac{34}{41}$

17. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 일반항 추론하기
$b_n = \dfrac{a_n}{n+1}$이라 놓으면 $a_n = (n+1)b_n$이므로
$(n+3)b_{n+2} = \boxed{(n+2)}\,b_{n+1} + b_n$
$(n+3)(b_{n+2} - b_{n+1}) = -(b_{n+1} - b_n)$ $\cdots\cdots$ (★)
식 (★)에 $n = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$ $\ (m \geq 2)$를 대입하면
$4(b_3 - b_2) = -(b_2 - b_1)$
$5(b_4 - b_3) = -(b_3 - b_2)$
$\vdots$
$(m+2)(b_{m+1} - b_m) = -(b_m - b_{m-1})$
좌변과 우변을 각각 곱하여 정리하면,
$b_{m+1} - b_m = \left(-\dfrac{1}{4}\right)\left(-\dfrac{1}{5}\right)\cdots\left(-\dfrac{1}{m+2}\right)(b_2 - b_1)$
$b_n = b_1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k)$ $\ (n \geq 2)$
$\therefore a_n = (n+1)\left(\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n-1}\boxed{\dfrac{(-1)^{k-1}}{(k+2)!}}\right)$ $\ (n \geq 2)$
$f(n) = n+2$, $g(k) = \dfrac{(-1)^{k-1}}{(k+2)!}$
$\therefore f(1)g(3) = \dfrac{1}{40}$

18. [출제의도] 무한급수의 성질 추론하기
$y = \log_c|x|$과 $y = n$의 교점의 x좌표를 구하면

$a_n = c^n$ 이고 $b_n = -c^n$이다. 즉, $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$은 공비가 c인 등비수열이다.

ㄱ. $a_n + b_n = c^n + (-c^n) = 0$ (참)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ 이면 $0 < c < 1$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{c}{1-c}$ (참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$이 발산하면 수열 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$의 공비 $\frac{1}{c}$은 $\frac{1}{c} > 1$ 이므로 수열 $\{a_n\}$의 공비 c는 $0 < c < 1$ 이다. 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다. (거짓)

19. [출제의도] 도함수의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

조건 (가)에 의해 $y = f(x)$의 그래프는 y축 대칭이므로

$f(x) = x^4 + bx^2 + 10$

$f'(x) = 4x^3 + 2bx$, $f'(1) = 4 + 2b$ 이므로

$-6 < 4 + 2b < -2$

$-10 < 2b < -6$

$-5 < b < -3$ 이므로 $b = -4$

$f(x) = x^4 - 4x^2 + 10$

$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

극솟값은 $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 6$

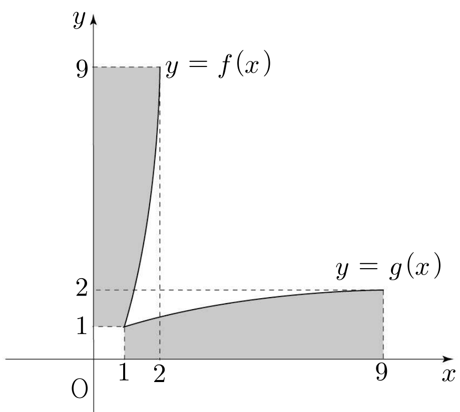
20. [출제의도] 함수의 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$S(\alpha) = \alpha\sqrt{1-\alpha^2}$ 이므로

$$\lim_{\alpha\to 1-0} \frac{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha}} = \lim_{\alpha\to 1-0} \frac{\alpha\sqrt{(1-\alpha)(1+\alpha)}}{\sqrt{1-\alpha}}$$

$$= \lim_{\alpha\to 1-0} \alpha\sqrt{1+\alpha} = \sqrt{2}$$

21. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



그림에서 어두운 두 부분의 넓이가 같으므로

$$\int_1^9 g(x)dx = 18 - 1 - \int_1^2 f(x)dx$$

$$= 18 - 1 - \int_1^2 (x^3 + x - 1)dx$$

$$= 17 - \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^2$$

$$= 17 - \frac{17}{4} = \frac{51}{4}$$

22. [출제의도] 등차수열 계산하기

$a_{100} - a_{90} = 10d = 34$

$a_{21} = a_1 + 20d = 2 + 2\cdot 34 = 70$

23. [출제의도] 중복조합의 성질 이해하기

$x = 2l$, $y = 2m$, $z = 2n$ (단, l, m, n은 자연수)라 하면, $l + m + n = 10$이 된다.

${}_{3+7-1}\mathrm{C}_7 = {}_9\mathrm{C}_7 = 36$

24. [출제의도] 함수의 극대·극소 이해하기

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$

$f(x) = x^3 - 12x + C$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

극솟값은 $f(2) = 8 - 24 + C = 3$ $\quad \therefore C = 19$

극댓값은 $f(-2) = 35$

25. [출제의도] 미분과 적분의 관계 이해하기

$f(x) = x^2 - 6x + C$

$f(x)$의 최솟값은 $f(3) = -9 + C = 8$

$C = 17$

$f(x) = x^2 - 6x + 17$

$\therefore f(1) = 12$

26. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$b_n = \sqrt{a_n + n} - \sqrt{n}$ 이라 하면,

$\lim_{n\to\infty} b_n = 5$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(b_n + \sqrt{n})^2 - n}{\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b_n^2}{\sqrt{n}} + 2\lim_{n\to\infty} b_n = 10$$

27. [출제의도] 함수의 극한의 성질을 이용하여 함수 추론하기

조건(가), (나)에 의하여 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이고, $f(1) = 0$ 이므로

$f(x) = 2(x-1)(x+a)$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)(x+a)}{x-1} = 2(1+a) = 3$$

$\therefore a = \frac{1}{2}$

$f(x) = (x-1)(2x+1)$

$\therefore f(2) = 5$

28. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log t = 3 + \alpha$ $(0 \le \alpha < 1)$

$\log t^2 = 2\log t = 6 + 2\alpha$

$\log \frac{1}{t} = -3 - \alpha$

i) $\alpha = 0$ 일 때, $\log t = 3$, $t = 10^3$

ii) $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ 일 때,

$3 + \alpha = \frac{1}{4}\cdot 6 - \frac{1}{2}\cdot(-4) = \frac{7}{2}$ $\quad \therefore \alpha = \frac{1}{2}$

(조건에 맞지 않음)

iii) $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$ 일 때,

$3 + \alpha = \frac{1}{4}\cdot 7 - \frac{1}{2}\cdot(-4) = \frac{15}{4}$ $\quad \therefore \alpha = \frac{3}{4}$

$\log t = 3 + \frac{3}{4}$, $\quad t = 10^{\frac{15}{4}}$

$A = 10^3 \times 10^{\frac{15}{4}} = 10^{\frac{27}{4}}$

$\therefore 4\log A = 27$

29. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 규칙성 추론하기

$a_{n+1} = a_n + 2(n+1) + n$

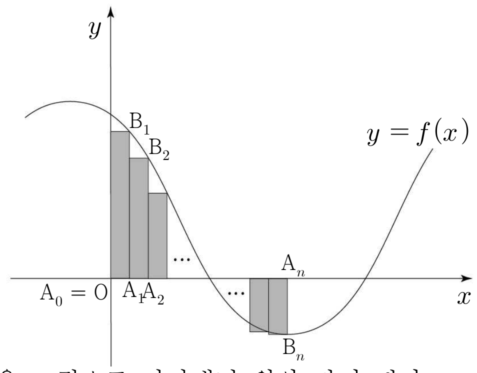
$a_{n+1} = a_n + 3n + 2$

수열 $\{a_n\}$의 계차수열의 일반항 $b_n = 3n + 2$

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(3k+2) = \frac{n(3n+1)}{2}$$

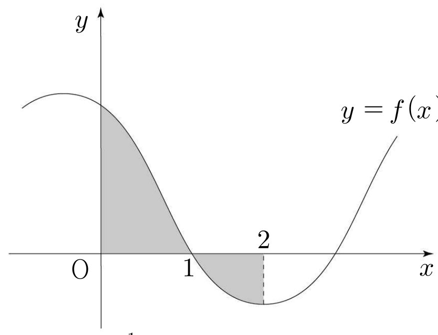
$a_{20} = 610$

30. [출제의도] 정적분의 정의 이해하기



S_n을 그림으로 나타내면 위와 같이 된다.

$\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은 아래 그림의 어두운 부분의 넓이와 같으므로,



$$2\lim_{n\to\infty} S_n = 2\int_0^1 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)dx$$

$$- 2\int_1^2 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)dx = 11$$