

2012학년도 7월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

수리 영역

“가”형 정답

1	①	2	④	3	④	4	②	5	④
6	③	7	①	8	⑤	9	②	10	①
11	③	12	⑤	13	③	14	③	15	④
16	③	17	③	18	⑤	19	④	20	②
21	②	22	60	23	12	24	14	25	4
26	10	27	11	28	50	29	610	30	296

해설

1. [출제의도] 행렬 계산하기

$$A^2 - AB = A(A - B) = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

∴ 모든 성분의 합은 12

2. [출제의도] 로그 계산하기

$$\left(\frac{3}{\log_2 2}\right)^3 + 8\log_2 2 = 35$$

3. [출제의도] 지수부등식 계산하기

$$3^{x^2} < 3^{x+2}, \quad x^2 < x+2, \quad x^2 - x - 2 < 0$$

$$-1 < x < 2$$

∴ $\alpha + \beta = 1$

4. [출제의도] 무리방정식 계산하기

$$\sqrt{x^2 - 2x + 8} = t \quad (t \geq 0) \text{ 라 하자.}$$

$$t = t^2 - 12, \quad t^2 - t - 12 = 0 \quad \therefore t = 4$$

$$\sqrt{x^2 - 2x + 8} = 4, \quad x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \text{ 의 두 근을 } \alpha, \beta \text{ 라 하면}$$

근과 계수의 관계에 의해 $\alpha\beta = -8$

5. [출제의도] 조건부확률을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

A 또는 B가 회장으로 뽑히는 사건을 M, F가 부회장으로 뽑히는 사건을 N라 하면,

$$P(M) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(M \cap N) = \frac{2}{6 \cdot P_2} = \frac{1}{15}$$

$$P(N|M) = \frac{P(M \cap N)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{5}$$

6. [출제의도] 미분과 적분의 관계를 이용하여 함수 추론하기

$$\{f(x)g(x)\}' = h(x) \text{ 이므로}$$

$$f(x)g(x) = \int h(x) dx$$

$$xg(x) = \int \ln x dx$$

부분적분법을 이용하여 정리하면

$$xg(x) = x \ln x - x + C$$

$$1 \times g(1) = -1 + C = -1 \quad \therefore C = 0$$

$$\therefore g(x) = \ln x - 1$$

$$\therefore g(e) = 0$$

7. [출제의도] 지수의 성질을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

$$G_1 = \frac{15}{14} (1.05)^{35}, \quad G_2 = \frac{5}{14} (1.05)^{20}$$

$$\frac{G_1}{G_2} = 3(1.05)^{15} = 6$$

8. [출제의도] 상용로그를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

$$75(0.997)^n = 80(0.995)^n$$

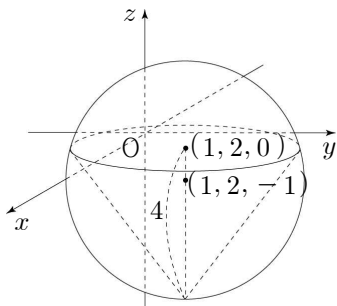
$$n(\log 0.997 - \log 0.995) = \log 80 - \log 75$$

$$n(-1 + 0.999 + 1 - 0.998) = 5 \log 2 - \log 3 - 1$$

$$0.001 \times n = 0.028$$

$$\therefore n = 28$$

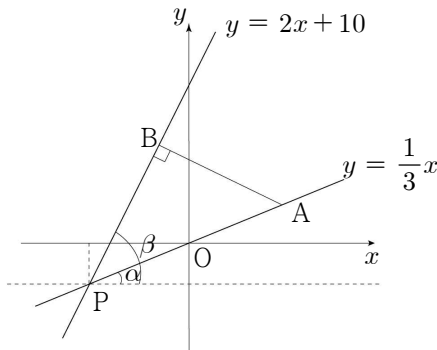
9. [출제의도] 공간좌표 이해하기



구 $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ 를 xy 평면으로 자른 단면은 원 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$ 이 되므로, 밑면의 넓이는 8π 가 되고, 부피가 최대가 되는 원뿔의 높이는 4이다.

$$\therefore \text{원뿔의 부피의 최댓값은 } \frac{32}{3}\pi$$

10. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = 1, \quad \beta - \alpha = 45^\circ$$

∴ 삼각형 PAB는 직각이등변삼각형

$$\therefore PA = 12\sqrt{2}$$

11. [출제의도] 함수의 연속성과 미분가능성에 대한 성질 추론하기

$$\neg. \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} [xf(x)] = 1 \quad (\text{참})$$

$$\neg. g(x) = [xf(x)] \text{ 라 하면,}$$

$$g(\sqrt{2}) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x) = 1 \text{ 이므로}$$

$[xf(x)]$ 는 $x = \sqrt{2}$ 에서 불연속이다. (거짓)

$$\neg. \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(x - \sqrt{2})[xf(x)] - 0}{x - \sqrt{2}} = 1 \quad (\text{참})$$

12. [출제의도] 치환적분을 이용하여 회전체의 부피 계산하기

$$V = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^0 (2x+1)^4 dx$$

$$2x+1 = t \text{ 라 하면}$$

$$V = \pi \int_0^1 t^4 \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{\pi}{10}$$

13. [출제의도] 도함수를 이용하여 그래프의 개형 추론하기

∴ 함수 $f(x)$ 는 원점 O와 $x = b, c, e$ 에서 변곡점을 가진다. (참)

∴ $f(x)$ 는 $x = d$ 에서 극대가 된다. (참)

∴ 구간 $[a, e]$ 에서 최댓값은 $f(d)$ 이다. (거짓)

14. [출제의도] 무한등비급수의 합을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

수열 $\{\overline{A_n B_n}\}$ 은 첫째항이 $3\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ 이고 공비가 $\cos \theta$ 인 등비수열이다.

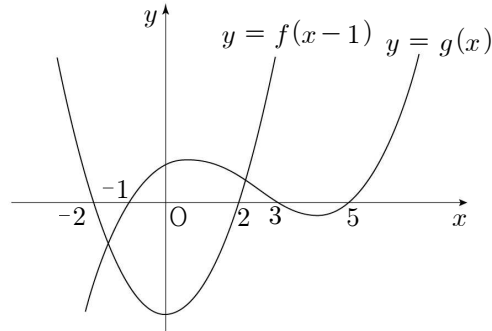
$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{A_n B_n} = \frac{3\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{1 - \cos \theta} = 9\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\cos \theta = \frac{2}{3}$$

$$\overline{B_1 C_1} = 3 \sin \theta = \sqrt{5}$$

15. [출제의도] 부등식 이해하기

$y = f(x-1)$ 의 그래프와 $y = g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$\frac{f(x-1)}{\sqrt{g(x)}} < 0$ 의 해는 $\begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x-1) < 0 \end{cases}$ 의 해와 일치하므로

$g(x) > 0$ 일 때 $-1 < x < 3$ 또는 $x > 5$

$f(x-1) < 0$ 일 때 $-2 < x < 2$

그러므로 만족하는 해는 $-1 < x < 2$ 이다.

따라서 만족하는 정수해는 0, 1 이고 그 합은 1 이다.

16. [출제의도] 일차변환을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

앞음변환 f 를 나타내는 행렬을 X , 회전변환 g 를 나타내는 행렬을 Y 라 할 때,

$$\angle AOB = \frac{\pi}{6}, \quad \overline{OB} = \sqrt{3} \text{ 이므로}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \text{ 이다.}$$

$$g \circ f \text{ 를 나타내는 행렬은 } YX = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$$

∴ 모든 성분의 합은 6

17. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 일반항 추론하기

$$b_n = \frac{a_n}{n+1} \text{ 이라 놓으면 } a_n = (n+1)b_n \text{ 이므로}$$

$$(n+3)b_{n+2} = \overline{(n+2)}b_{n+1} + b_n$$

$$(n+3)(b_{n+2} - b_{n+1}) = -(b_{n+1} - b_n) \dots \dots$$

(★)

식 (★)에 $n = 1, 2, \dots, m-1$ ($m \geq 2$) 를 대입하면

$$4(b_3 - b_2) = -(b_2 - b_1)$$

$$5(b_4 - b_3) = -(b_3 - b_2)$$

$$\vdots$$

$$(m+2)(b_{m+1} - b_m) = -(b_m - b_{m-1})$$

좌변과 우변을 각각 곱하여 정리하면,

$$b_{m+1} - b_m = \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{5}\right) \dots \left(-\frac{1}{m+2}\right)(b_2 - b_1)$$

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore a_n = (n+1) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{(k+2)!} \right) \quad (n \geq 2)$$

$$f(n) = n+2, \quad g(k) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k+2)!}$$

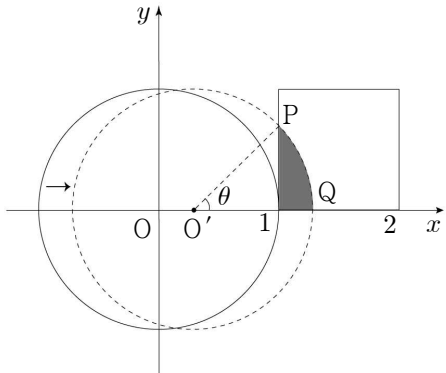
$$\therefore f(1)g(3) = \frac{1}{40}$$

18. [출제의도] 확률을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

3개의 공에 적혀 있는 세 수의 합이 짝수가 되는 경우는 (홀수, 홀수, 짝수), (짝수, 짝수, 짝수)의 두 가지 경우이므로

$$\frac{{}_5C_2 \cdot {}_4C_1}{{}_9C_3} + \frac{{}_4C_3}{{}_9C_3} = \frac{11}{21}$$

19. [출제의도] 도함수를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



그림과 같이 원 O의 t 초 후의 중심을 O' , 원과 정사각형 ABCD의 교점을 P, Q라 하고, $\angle PO'Q = \theta$ 라 하면

$$\cos \theta = 1 - t \text{ 에서 } -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} = -1 \text{ 이다.}$$

원과 정사각형 ABCD가 겹치는 부분의 넓이

$$S = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}(1-t)\sin \theta$$

$$= \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta \right) \frac{1}{\sin \theta}$$

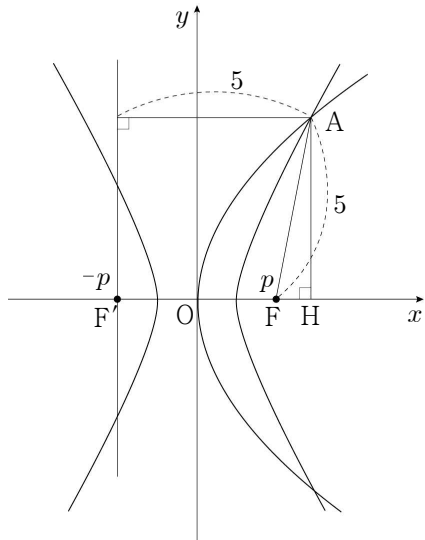
원 O의 중심이 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 을 지나는 순간은 $t = \frac{1}{2}$ 이다.

$t = \frac{1}{2}$ 일 때, $\theta = \frac{\pi}{3}$ 이다.

$\therefore$ 원 O의 중심이 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 을 지나는 순간 넓이

S 의 시간(초)에 대한 변화율은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

20. [출제의도] 포물선과 쌍곡선의 성질 이해하기



점 A에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면,

$$\cos(\angle AFH) = \frac{1}{5} \text{ 이므로 } \overline{FH} = 1$$

포물선의 정의에 의하여

$$2p + 1 = 5 \quad \therefore p = 2$$

$A(3, 2\sqrt{6})$ 이므로

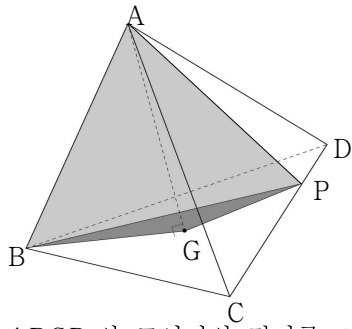
$$\overline{AF'} = 7$$

쌍곡선의 정의에 의하여 $|\overline{AF'} - \overline{AF}| = 2a = 2$

$$a = 1, b = \sqrt{3}$$

$$\therefore ab = \sqrt{3}$$

21. [출제의도] 정사영의 성질 이해하기



정사면체 ABCD의 모서리의 길이를 $4a$ 라 하면, 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \sqrt{(4a)^2 + a^2 - 4a^2} = \sqrt{13}a$$

삼각형 ABP의 넓이는 $6a^2$ 이다.

점 A에서 삼각형 BCD에 내린 수선의 발을 G라 하면, 점 G는 삼각형 BCD의 무게중심이다.

삼각형 BGP의 넓이는 삼각형 BCD의 넓이의

$$\frac{1}{6} \text{ 이므로 삼각형 BGP의 넓이는 } \frac{2\sqrt{3}}{3}a^2$$

$$6a^2 \cos \theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}a^2$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

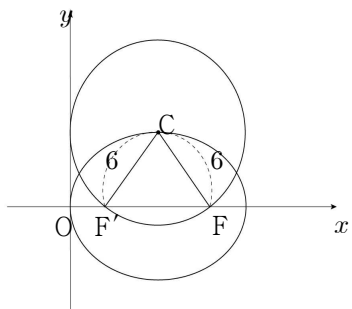
22. [출제의도] 이항계수 계산하기

$${}_6C_r x^{6-r} \left(\frac{2}{x}\right)^r = {}_6C_r 2^r x^{6-2r}$$

$$6 - 2r = 2 \quad \therefore r = 2$$

$$x^2 \text{의 계수는 } {}_6C_2 2^2 = 60$$

23. [출제의도] 타원의 성질 이해하기



원 $(x-6)^2 + (y-5)^2 = 36$ 의 중심을 C, 타원의 초점을 각각 F, F'이라 하면

$$\text{장축의 길이는 } \overline{F'C} + \overline{CF} = 12$$

24. [출제의도] 미분계수의 성질 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}f'(1) = -1$$

$$f'(1) = -2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1+5h)}{h} = -7f'(1) = 14$$

25. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$$\int_0^2 f(t) dt = a \text{ 라 하면,}$$

$$f(x) = 3x^2 + x + a \text{ 이다.}$$

$$\int_0^2 (3t^2 + t + a) dt = a \quad \therefore a = -10$$

$$f(x) = 3x^2 + x - 10$$

$$\therefore f(2) = 4$$

26. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$$b_n = \sqrt{a_n + n} - \sqrt{n} \text{ 이라 하면,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b_n + \sqrt{n})^2 - n}{\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n^2}{\sqrt{n}} + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 10$$

27. [출제의도] 삼각방정식 이해하기

$$2 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x = 0$$

$$2 \sin x (\sin x + \cos x) = 0$$

$$2\sqrt{2} \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ 또는 } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$0 \leq x \leq \pi \text{ 이므로}$$

$$x = 0, \frac{3}{4}\pi, \pi \quad \therefore \text{모든 실근의 합은 } \frac{7}{4}\pi$$

$$p + q = 11$$

28. [출제의도] 분수방정식을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

용기 A에 넣은 소금의 양을 x 라 하면

$$a + b = 45 \text{ 이므로}$$

$$\frac{x}{200} \times 100 + \frac{75-x}{175-x} \times 100 = 45$$

$$x = 15, x = 50$$

$$\therefore x = 50 \quad \left(\because x > \frac{75}{2} \right)$$

29. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 규칙성 추론하기

$$a_{n+1} = a_n + 2(n+1) + n$$

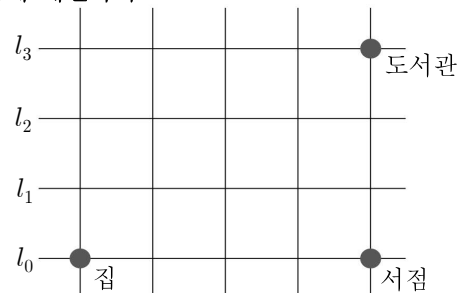
$$a_{n+1} = a_n + 3n + 2$$

수열 $\{a_n\}$ 의 제차수열의 일반항 $b_n = 3n + 2$

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k+2) = \frac{n(3n+1)}{2}$$

$$a_{20} = 610$$

30. [출제의도] 경우의 수를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기



i) 연락 받은 교차로가 l_0 에 있는 경우: 1

ii) 연락 받은 교차로가 l_1 에 있는 경우: $\frac{6!}{4!2!}$

iii) 연락 받은 교차로가 l_2 에 있는 경우: $\frac{8!}{4!4!}$

iv) 연락 받은 교차로가 l_3 에 있는 경우: $\frac{10!}{4!6!}$

$$\therefore 1 + 15 + 70 + 210 = 296$$