서울 9급 평가 해설

정 답

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
④	①	③	②	④	②	③	④	③	④
11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
②	①	①	②	③	④	①	①	③	②

해 설

1. $p \Rightarrow q \Leftrightarrow P \subset Q$ 이므로 $P^C \cup Q = U$ 이다.

2. 준 식 $= (x+y)(x^2-xy+y^2)$
$= (x+y)(x^2+y^2-xy)$ $\leftarrow x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ 대입
$= (x+y)\{(x+y)^2-2xy-xy\}$
$= (x+y)\{(x+y)^2-3xy\}$ $\leftarrow x+y=3,\ xy=1$ 대입
$= 3\times(9-3)$
$= 18$

3. a, b가 실수이면 주어진 이차방정식의 계수가 모두 실수이므로,
한 근이 $1+2i$이면 다른 한 근은 $1-2i$이다.
따라서, 근과 계수와의 관계에 의하여
두 근의 합: $(1+2i)+(1-2i)=-a$ $\therefore a=-2$
두 근의 곱: $(1+2i)(1-2i)=b$ $\therefore b=5$
$\therefore a+b=3$

4. $(a-1)x+a+b \geq 0$
$(a-1)x \geq -a-b$ 의 해가 없기 위해서는
($0 \cdot x \geq$ 양수)의 꼴이어야 하므로
$a-1=0,\ -a-b>0$을 만족하면 된다.
$\therefore a=1,\ b<-1$

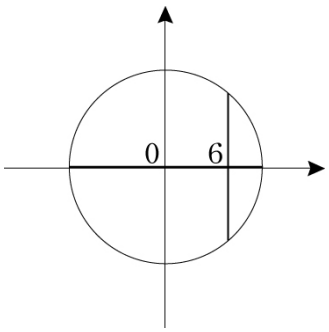
5. 좌표평면 위의 두 점 $A(3,\ 1), B(a,\ b)$가 직선 $y=x+1$에 대하여 대칭이므로
다음 두 가지 조건을 만족하면 된다.
(1) 점 A, B의 중점이 $y=x+1$ 위에 있다. (A, B 의 중점을 $y=x+1$에 대입)
$\therefore$ 점 A, B의 중점 $\left(\frac{a+3}{2},\ \frac{b+1}{2}\right)$을 $y=x+1$에 대입하면
$\frac{b+1}{2}=\frac{a+3}{2}+1$ $\therefore b=a+4$ $\cdots$①

(2) 선분 AB는 직선 $y=x+1$과 수직이므로, 선분 AB의 기울기는 -1이다.

선분 AB의 기울기: $\frac{b-1}{a-3}=-1$ $\therefore b=-a+4$ …②

위의 두 식 ①, ②을 연립하여 풀면 $a=0,\ b=4$ $\therefore a+b=4$

6. 원 $x^2+y^2=10^2$의 내부의 한 점 $A(6,0)$를 지나고
그 길이가 가장 긴 현의 길이는 지름을 말하므로 그 길이가 20이고,
가장 짧은 현의 길이는 한 점 $A(6,0)$를 지나고 지름에 수직인 현이므로 그 길이는 16이다.
($\because$ $x=6$일 때 $y=8,\ -8$ 이므로 현의 길이는 16이다.)
따라서, 가장 긴 현(길이: 20)과 가장 짧은 현(길이: 16)은 한 개씩 이고 그 사이에 길이가 17, 18, 19인 현은 각각 2개씩 이므로 길이가 자연수인 현의 개수는 $2+(3\times2)=8$이다.



7. 두 함수 $f(x)=x+a,\ g(x)=ax+b$에 대하여
$(g\circ f)(x)=2x+1$이므로
$g(f(x))=2x+1$
$g(x+a)=2x+1$
$\therefore a(x+a)+b=2x+1$이므로 전개하여 계수를 비교하면
$\therefore a=2,\ a^2+b=1$
$\therefore a=2,\ b=-3$
그러므로 $g(x)=2x-3$이다.
문제에서 $g^{-1}(1)$을 구하는 것이므로
$g^{-1}(1)=p$라고 하면
$g(p)=1$
$\therefore\ 2p-3=1$
$\therefore p=2$
$\therefore g^{-1}(1)=2$

8. $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\sin\theta = \frac{4}{5}$

9. 삼각형 ABC에서 $C=45^\circ, \overline{AB}=\sqrt{5}, \overline{AC}=\sqrt{2}$ 이므로
〈사인법칙〉에 의하여
$\frac{\sqrt{2}}{\sin B} = \frac{\sqrt{5}}{\sin 45^\circ}$ 이므로 $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 을 대입하여 정리하면
$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{5}}{5}$

10. 두 행렬 A, B가 $A+B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 이므로
연립하여 행렬 B를 구하면 $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 이다.
$\therefore\ A-2B=(A-B)-B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
따라서, 행렬 $A-2B$의 모든 성분의 합은 -2이다.

11. $2^a = 20^b = 10$ 이므로
$2 = 10^{\frac{1}{a}}$ …①, $20 = 10^{\frac{1}{b}}$ …② 이다.
따라서 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ 의 값을 구하려면 ①÷②를 한다.
①÷② : $10^{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} = \frac{1}{10} = 10^{-1}$
$\therefore \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -1$

12. 지수함수에서 밑이 1보다 클 때, 밑의 값이 클수록 y축에 가까우므로 $1 < a < b$이다.

[방법1]
$1 < a < b$에서 $\log 1 < \log a < \log b$ $\therefore\ 0 < \log a < \log b$
$A-B = \log_a b - \log_b a = \frac{\log b}{\log a} - \frac{\log a}{\log b} = \frac{(\log b)^2 - (\log a)^2}{\log a \cdot \log b}$
$= \frac{(\log b - \log a)(\log b + \log a)}{\log a \cdot \log b} > 0$ $\therefore A > B$ … ①
$B-C = \log_b a - \log_b \frac{a}{b} = \log_b \left(a \times \frac{b}{a}\right) = \log_b b = 1 > 0$ $\therefore B > C$ …②
$\therefore$ ①과 ②에 의하여 $A > B > C$

[방법2]

$1 < a < b$을 만족하는 적당한 a, b을 식에 대입하여 A, B, C의 대소를 구할 수 있다.

예를 들어, $a=2$, $b=4$을 대입하여 A, B, C을 구하면

$A=\log_2 4=2$, $B=\log_4 2=\frac{1}{2}$, $C=\log_4 \frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$이다.

$\therefore A > B > C$

13. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=1, a_{n+1}=3a_n+1\ (n=1,2,3,\ldots)$일 때,

a_5의 값을 구하는 문제이므로 n에 1부터 4까지 넣어서 a_5의 값을 구한다.

$n=1$을 대입하면, $a_2=3a_1+1=4$

$n=2$을 대입하면, $a_3=3a_2+1=13$

$n=3$을 대입하면, $a_4=3a_3+1=40$

$n=4$을 대입하면, $a_5=3a_4+1=121$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=4$, $S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$이므로 $\lim_{n\to\infty} S_n=4$이고,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{3a_n+4S_n}{4a_n+5S_n}=\frac{3\cdot 0+4\cdot 4}{4\cdot 0+5\cdot 4}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$

15. 함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-ax+2}{x-2} & (x\neq 2)\\ b & (x=2)\end{cases}$이 $x=2$에서 연속이 되려면 $\lim_{n\to\infty} f(x)=b$이어야 한다.

$\therefore \lim_{x\to 2} \frac{x^3-ax+2}{x-2}=b \quad \cdots②$

여기에서 분모에 $x=2$을 넣으면 분모가 0이 되므로,

분자에 $x=2$을 넣어도 분자가 0이 되어야 한다.

$\therefore 8-2a+2=0,\ a=5 \quad \cdots①$

①을 ②에 대입하면

$\therefore \lim_{x\to 2} \frac{x^3-5x+2}{x-2}=\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x-1)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x-1)=7 \quad \therefore b=7$

$\therefore a+b=12$

16. 함수 $f(x)=(3x^2-1)(x^2+x-2)$을 미분하면

$f'(x)=6x(x^2+x-2)+(3x^2-1)(2x+1)$이다.

$\therefore f'(-1)=10$

17. $f(x)=3x^2+4\int_0^1 f'(x)dx$ 에서 $\int_0^1 f'(x)dx=a$ …① 라고 하자.

따라서 $f(x)=3x^2+4a$ …② 가 된다.

$f'(x)=6x$ 이므로 ①식에 대입하여 정리하면 $a=3$이고

$a=3$을 ②식에 대입하면 $f(x)=3x^2+12$ 이 된다.

$\therefore f(2)=24$

18. 곡선 $y=x^2+1$과 x축, y축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 나타내는 식은

$\int_0^2 (x^2+1)dx$ 이다.

따라서, ①번의 식을 정적분으로 고치면,

$\lim\sum \Rightarrow \int$, $\frac{2k}{n}\Rightarrow x$, $\frac{2}{n}\Rightarrow dx$ 일 때

$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{2k}{n}\right)^2+1\right\}=\int_0^2 (x^2+1)dx$ 가 된다.

19. '민주공화국'의 다섯 글자를 일렬로 나열할 때, 양 끝에 받침이 있는 글자가 오도록 하는 방법의 수를 구하려면,

〈민, 공, 국〉 3개 중에 2개를 뽑아서 양 끝에 일렬로 나열하고 $\left({}_3P_2\right)$,

나머지 1개의 글자와 〈주, 화〉를 가운데에 일렬로 배열$(3!)$하는 방법의 수를 구하면 된다.

$\therefore {}_3P_2\times 3 = 36$

20.

X	-1	0	1	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	a	1

위의 확률분포표에서 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+a=1$ 이므로 $a=\frac{1}{6}$이 된다.

$\therefore E(X)=(-1)\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}$

$\therefore E(-3X+1)=-3E(X)+1=2$