

9급모의평가 수 학

김종두(경기과학고, 서울대 졸, KMO, KPhO 본인 수상, 메가스터디 온라인 수리논술 대표 강사, 명덕외고·고양외고 등 학교 특강)

<<총평>>

이미 공지했던 것처럼 현 교육과정의 “인문·자연 공통범위”에서 골고루 출제된 경향을 보이고 있다. 좀 더 자세히 들여다보면 [수학10]에서 9문항, [수학 I]에서 5문항, [미적분과 통계기본]에서 6문항이 출제되어서 골고루 출제되고 있음을 알 수 있다. 실제 시험에서는 일부 변동은 가능하겠지만, 모의평가의 형태가 유지된다는 전제 하에서, 수능 출제 범위가 아니었던 [수학10]에 대한 대비가 가장 중요하다고 볼 수 있다.

모의고사라는 것을 고려하더라도, 문제의 대부분은 매우 중요한 내용 및 주제와 관련하여 출제되었다. 수학 과목 도입이 처음인 만큼 당분간은 이런 기조가 유지될 것으로 보인다.

그럼에도 단순 기계적인 문제풀이를 넘어, 수학적 아이디어가 필요한 문항도 2~3개 정도 출제된 만큼, 수학에서 고득점을 노리는 수험생은 이에 대한 고려도 필요하다.

문제당 평균 1분 정도에 해결해야 되는 공무원시험의 특성상 난이도는 그리 높지 않다. 정확한 전략 하에 대비를 충실히 한다면 풀이 자체는 큰 문제가 되지 않을 것으로 보인다.

높지 않은 난이도 때문에, 오히려 수학 과목에서 중요한 것은 시간 관리라 할 수 있다. 풀수 있다는 자만감보다는 각 문제 풀이에 대한 시간 관리를 통해, 실제 시험에서는 시간을 저축하는 영역이 되도록 하는 전략적인 대비와 훈련이 필요하다.

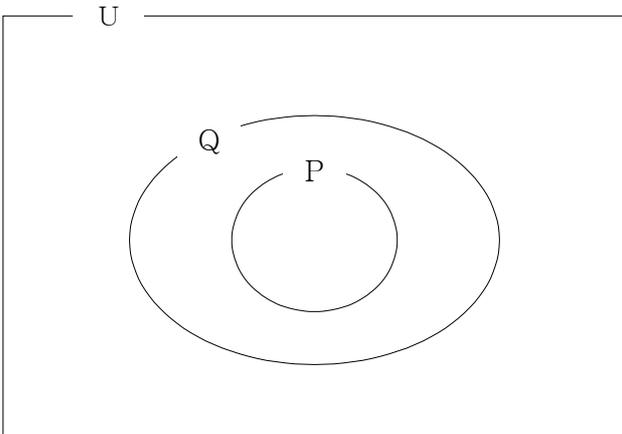
주어진 예시문항은 15분 이내에 모두 정확하게 해결 가능하므로, 본인의 실수 없이 빠른 시간에 문제를 해결하는 전략이 필요하다.

문 1. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각, P, Q 라 하자. $p \Rightarrow q$ 일 때, 다음 중 항상 성립하는 것은? (단, $U \neq \emptyset$)

- ① $Q \subset P$
- ② $P \cap Q = \emptyset$
- ③ $P^c \cap Q = \emptyset$
- ④ $P^c \cup Q = U$

[정답/풀이] ④

진리집합 P, Q 의 벤다이어그램은 다음과 같다.



<Tip> 집합의 포함관계는 벤다이어그램을 명확히 표현하는 것이 중요.

문 2. 두 실수 x, y 에 대하여 $x+y=3, xy=1$ 일 때, 다항식 $(x+y)(x^2-xy+y^2)$ 의 값은?

- ① 18
- ② 21
- ③ 24
- ④ 27

[정답/풀이] ①

$$(x+y)(x^2-xy+y^2) = (x+y)\{(x+y)^2-3xy\} = 3 \times (3^2-3 \cdot 1) = 18$$

<Tip> 중요한 곱셈공식 및 인수분해 공식은 정리해서 암기.

문 3. 두 실수 a, b 에 대하여 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 한 근이 $1+2i$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4

[정답/풀이] ③

계수가 실수인 실계수 이차방정식이므로 $1+2i$ 가 근이면, 그 켈레복소수인 $1-2i$ 도 근이다. 근과 계수와의 관계에 의해서 $-a = (1+2i) + (1-2i), b = (1+2i)(1-2i)$ 이므로, $a = -2, b = 5$ 가 되어 $a+b=3$ 이다.

<Tip> 실계수 다항방정식과 근의 관계를 파악.

문 4. x 에 관한 부등식 $(a-1)x+a+b \geq 0$ 의 해가 없기 위한 b 의 값의 범위는? (단, a, b 는 실수)

- ① $b \geq -1$
- ② $b < -1$
- ③ $b \geq 1$
- ④ $b < 1$

[정답/풀이] ②

일차부등식의 해가 존재하지 않기 위해서는 불능형태가 되어야 된다. $0 \cdot x + (\text{음수}) \geq 0$ 형태가 되어야 된다.

그러므로 $a-1=0$, $a+b < 0$ 을 만족해야 되고, $a=1$, $b < -1$

<Tip> 방정식 근의 부정 및 불능 조건의 정리 및 명확한 이해 필요.

문 5. 좌표평면 위의 두 점 $A(3, 1)$, $B(a, b)$ 가 직선 $y=x+1$ 에 대하여 대칭할 때, $a+b$ 의 값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4

[정답/풀이] ④

A, B의 중점이 $y=x+1$ 위의 점이므로, $\frac{1+b}{2} = \frac{3+a}{2} + 1$ 이 성립

AB를 잇는 선분의 기울기와 $y=x+1$ 의 기울기는 서로 수직이므로 $\frac{1-b}{3-a} \cdot 1 = -1$

두 관계식을 연립하면, $a=0$, $b=4$ 가 되어 $a+b=4$

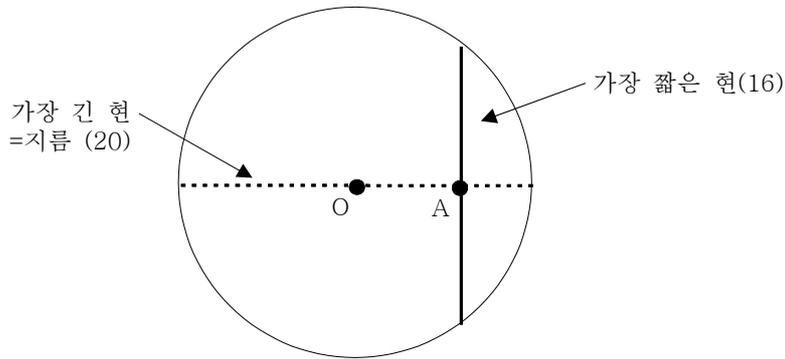
<Tip> 기울기가 1인 직선에 대한 대칭 조건 정리. 점대칭에 대한 조건도 같이 정리 필요.

문 6. 원 $x^2+y^2=100$ 의 내부의 한 점 $A(6, 0)$ 를 지나고 그 길이가 자연수인 현의 개수는?

- ① 7
- ② 8
- ③ 9
- ④ 10

[정답/풀이] ②

A를 지나면서 OA와 수직인 현이 가장 짧은 현으로 길이가 16이고, A를 지나는 지름이 가장 긴 현으로 길이가 20이다.



현을 A를 회전축으로 돌려가면, 길이가 17, 18, 19인 현이 양 방향으로 각각 하나씩 생긴다. 그러므로 길이가 16인 현 1개, 20인 현 1개, 17, 18, 19인 현이 각각 2개로 총 8개의 자연수 길이를 갖는 현이 가능하다.

<Tip> 계산보다는 아이디어가 중요한 문제이다. 발상에 대한 경험을 유사한 문제에서 응용할 수 있도록 정리해야 된다.

문 7. 두 함수 $f(x) = x + a, g(x) = ax + b$ 에 대하여 $(g \circ f)(x) = 2x + 1$ 일 때, $g^{-1}(1)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수)

- ① -3
- ② -2
- ③ 2
- ④ 3

[정답/풀이] ③

$g(f(x)) = a(x+a) + b = ax + a^2 + b = 2x + 1$ 이므로, $a = 2, b = -3$ 이다. $g(x) = 2x - 3$ 이므로, $g^{-1}(1) = c$ 라고 하면, $g(c) = 1$ 이 되어, $c = 2$ 이다.

<Tip> 합성함수 및 항등함수, 역함수의 성질 및 계산 규칙에 대한 정리가 필요하다.

문 8. $\sin\theta = -\frac{4}{5}$ 일 때, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ 의 값은?

- ① $-\frac{4}{5}$
- ② $-\frac{3}{5}$
- ③ $\frac{3}{5}$
- ④ $\frac{4}{5}$

[정답/풀이] ④

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta = \frac{4}{5}$$

<Tip> 삼각함수의 기본 공식은 숙지가 필요하다. 특히 여각, 보각의 공식에 대한 훈련이 필요하다.

문 9. 삼각형ABC에서 $C=45^\circ$, $\overline{AB}=\sqrt{5}$, $\overline{AC}=\sqrt{2}$ 일 때, $\sin B$ 의 값은?

- ① $\frac{\sqrt{2}}{5}$
- ② $\frac{\sqrt{3}}{5}$
- ③ $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- ④ $\frac{\sqrt{6}}{5}$

[정답/풀이] ③

sin 공식에 의해서 $\frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$ 이므로, $\frac{\sqrt{2}}{\sin B} = \frac{\sqrt{5}}{\sin 45^\circ}$.

그러므로 $\sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 이다.

<Tip> 사인법칙과 코사인공식의 암기 및 응용 연습이 필요.

문 10. 두 행렬 A, B 가

$$A+B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A-B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ 일 때,}$$

행렬 $A-2B$ 의 모든 성분의 합은?

- ① -8
- ② -5
- ③ -4
- ④ -2

[정답/풀이] ④

두 식을 더해서 2로 나누면 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

두 식을 뺀 후 2로 나누면 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$A-2B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 이므로 모든 성분의 합은 -2이다.

<Tip> 기본적인 행렬 연산의 규칙을 적용하는 훈련이 필요하다.

문 11. $2^a=20^b=10$ 일 때, $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ 의 값은?

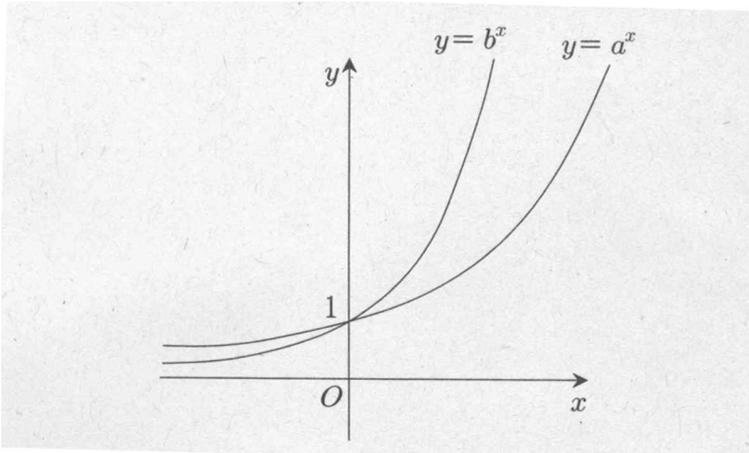
- ① -2
- ② -1
- ③ 1
- ④ 2

[정답/풀이] ②

$2 = 10^{\frac{1}{a}}$, $20 = 10^{\frac{1}{b}}$ 이므로, $\frac{2}{20} = 10^{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$ 가 되어, $\frac{1}{a}-\frac{1}{b} = -1$ 이다.

<Tip> 지수법칙 및 이에 대한 응용 계산법에 대한 유형 정리.

문 12. 두 지수함수 $y=a^x$, $y=b^x$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 세 수 $A=\log_a b$, $B=\log_b a$, $C=\log_b \frac{a}{b}$ 의 대소 관계로 옳은 것은?



- ① $A > B > C$
- ② $A > C > B$
- ③ $B > A > C$
- ④ $C > A > B$

[정답/풀이] ①

주어진 그래프에 의해서 $1 < a < b$ 이다.

a, b 의 범위에 의해서 $A > 1$, $B < 1$ 이 성립한다.

$C = \log_b a - 1$ 이므로 $C = B - 1$ 가 되어, $C < B < A$ 가 성립한다.

<Tip> 밑조건에 따른 지수함수 및 로그함수 그래프의 이해 필요.

문 13. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1=1, a_{n+1}=3a_n+1$ ($n=1, 2, 3, \dots$)일 때, a_5 의 값은?

- ① 121
- ② 123
- ③ 125
- ④ 127

[정답/풀이] ①

$$a_2 = 3a_1 + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$$

$$a_3 = 3a_2 + 1 = 3 \cdot 4 + 1 = 13$$

$$a_4 = 3a_3 + 1 = 3 \cdot 13 + 1 = 40$$

$$a_5 = 3a_4 + 1 = 3 \cdot 40 + 1 = 121$$

<Tip> 간단한 점화식을 통한 특정 n에서의 수열값은 일반항을 구하기보다는 직접 점화식 연산을 통해서 구하는 것이 더 간단하다.

문 14. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 4에 수렴하고, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n + 4S_n}{4a_n + 5S_n}$

의 값은?

- ① $\frac{3}{4}$
- ② $\frac{4}{5}$
- ③ $\frac{5}{4}$
- ④ $\frac{4}{3}$

[정답/풀이] ②

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 4$ 이므로, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이다. 그러므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n + 4S_n}{4a_n + 5S_n} = \frac{4}{5}$ 이다.

<Tip> 수열 및 급수의 극한에 대한 성질 및 규칙을 정리해야 된다.

문 15. 함수 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - ax + 2}{x - 2} & (x \neq 2) \\ b & (x = 2) \end{cases}$ 이 $x=2$ 에서 연속이 되도록 상수 a, b 의 값을 정

할 때, $a+b$ 의 값은?

- ① 10
- ② 11
- ③ 12
- ④ 13

[정답/풀이] ③

$x=2$ 에서 연속이기 위해서는 x^3-ax+2 는 $x-2$ 로 인수분해가 되어야 된다. 그러므로

$a=5$ 이다. 즉 $\frac{x^3-5x+2}{x-2} = \frac{(x-2)(x^2+2x-1)}{x-2} = x^2+2x-1$ 이 된다.

$x=2$ 에서 연속이므로 $b = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+2x-1) = 7$ 이다.

$a=5, b=7$ 이므로 $a+b=12$.

<Tip> 다양한 유형에 대한 극한 계산법의 정리 및 훈련 필요.

문 16. 함수 $f(x) = (3x^2-1)(x^2+x-2)$ 에 대하여 $f'(-1)$ 의 값은?

- ① 4
- ② 6
- ③ 8
- ④ 10

[정답/풀이] ④

곱함수의 미분법에 의해서

$f'(x) = (6x)(x^2+x-2) + (3x^2-1)(2x+1)$ 이다.

그러므로 $f'(-1) = 10$.

<Tip> 기본적인 미분 연산에 대한 연습이 중요. 특히 미적분을 배우지 않은 수험생은 미적분은 반드시 따로 학습해 둘 것.

문 17. 다항함수 $f(x)$ 와 그 도함수 $f'(x)$ 가 등식

$f(x) = 3x^2 + 4 \int_0^1 f'(x)dx$ 를 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은?

- ① 24
- ② 26
- ③ 28
- ④ 30

[정답/풀이] ①

$\int_0^1 f'(x) dx$ 은 상수이므로 c 라고 가정하자.

그러면, $f(x) = 3x^2 + 4c$ 이다. 주어진 $f(x)$ 를 $\int_0^1 f'(x) dx$ 에 대입하면,

$$c = \int_0^1 f'(x) dx = [3x^2]_0^1 = 3 \text{ 이다.}$$

그러므로 $f(x) = 3x^2 + 12$ 이고, $f(2) = 24$.

<Tip> 기본적인 유형의 적분 계산법 및 테크닉에 대한 숙지.

문 18. 다음 중 곡선 $y = x^2 + 1$ 과 x 축, y 축 및 직선 $x = 2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 나타낸 식은?

① $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{2k}{n} \right)^2 + 1 \right\}$

② $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k}{n} + 1 \right)^2$

③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{k}{n} \right)^2 + 1 \right\}$

④ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} + 1 \right)^2$

[정답/풀이] ①

주어진 보기를 정적분으로 표현하면 각각 다음과 같다.

① $\int_0^2 (x^2 + 1) dx$

② $\int_0^2 (x+1)^2 dx$

③ $\int_0^1 (x^2 + 1) dx$

④ $\int_0^1 (x+1)^2 dx$

<Tip> 구분구적법과 정적분의 관계에 대한 정확한 이해 필요.

문 19. ‘민주공화국’의 다섯 글자를 일렬로 나열할 때, 양 끝에 받침이 있는 글자가 오도록 하는 방법의 수는?

① 12

② 24

③ 36

④ 48

[정답/풀이] ③

받침이 있는 “민”, “공”, “국” 중에 두 개를 골라서 양 끝에 오도록 하는 방법의 수는 ${}_3P_2$ 이고, 양 끝 문자를 제외한 나머지 문자 3개를 가운데에 순서를 고려하여 배열하는 방법의 수는 ${}_3P_3$ 가 되어 총 방법의 수는 $6 \times 6 = 36$ 가지이다.

<Tip> 순열 및 조합과 이에 대한 응용 계산 유형에 대한 정리 및 훈련 필요.

문 20. 다음은 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타낸 것이다.

| | | | | |
|----------|---------------|---------------|-----|---|
| X | -1 | 0 | 1 | 계 |
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | a | 1 |

이때, $E(-3X+1)$ 의 값은?

- ① 0
- ② 2
- ③ 4
- ④ 6

[정답/풀이] ②

$P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1) = 1$ 이 성립하므로, $a = \frac{1}{6}$ 이 된다. 그러면

$E(X) = (-1) \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$ 가 되고, $E(-3X+1) = -3E(X) + 1$ 이 성립하므로, 그 값은 2이다.

<Tip> 확률 분포에 대한 정확한 이해 및 상황에 따른 계산 방법 습득.