**1. 실수 $t=\sqrt[3]{50}-\sqrt[3]{20}$에 대하여 $t^3+30t$의 값은?**

① $10$ ② $20$ ③ $30$ ④ $40$

**[정답]** ③

**[해설]** $\sqrt[3]{50}=a$, $\sqrt[3]{20}=b$**라고 두면** $t=a-b$**이고,**

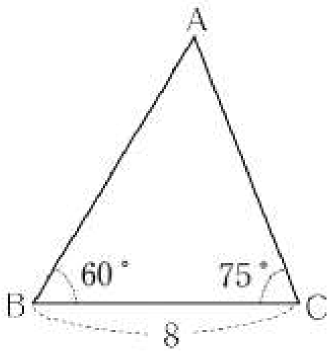
$a^3-b^3=50-20=30$, $ab=\sqrt[3]{50}\cdot\sqrt[3]{20}=\sqrt[3]{1000}=\sqrt[3]{(10)^3}=10$**이므로**

**곱셈 공식** $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$**에서**

$30=t^3+3\cdot10\cdot t$

$\therefore t^3+30t=30$

**2. 다음 삼각형 $ABC$에서 선분 $\overline{BC}=8$이고, $\angle B=60^\circ$, $\angle C=75^\circ$일 때, 삼각형에 외접하는 원의 반지름의 길이는?**




① $3\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{3}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{3}$

**[정답]** ③

**[해설]** $\angle A=45^\circ$**가 되므로, 삼각형 $ABC$에서 사인법칙을 이용하면**

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=8\sqrt{2}=2R$ $\quad\therefore R=4\sqrt{2}$

**3. 다항식 $x^{2021}-1$을 $x^2-x$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(2021)$의 값은?**

① $-2019$ ② $-2020$ ③ $2019$ ④ $2020$

**[정답]** ④

**[해설] 나누는 식이 이차식이므로 나머지는 일차식 이하이다.**

**따라서** $R(x)=ax+b$ ($a, b$**는 실수)로 두면**

$x^{2021}-1=(x^2-x)Q(x)+ax+b$**로 식을 세울 수 있다.**

**양변에** $x=0$**을 대입하면** $-1=b$

**양변에** $x=1$**을 대입하면** $0=a+b$ $\quad \therefore a=1$

$\therefore R(x)=x-1$

$\therefore R(2021)=2021-1=2020$

**4. 함수** $f(x)=x^2-kx$ **(**$0<k<1$**)에 대하여** $\int_0^1|f(x)|dx-\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{81}$**일 때,**

**상수** $k$**의 값은?**

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{9}$ ④ $\frac{1}{18}$

**[정답]** ①

**[해설]** $f(x)=x(x-k)=0$**의 두 근이** $x=0$, $k$**이므로,**

$0<x<k$**에서** $f(x)<0$, $x>k$**에서** $f(x)>0$**이다.**

**따라서** $\int_0^1|f(x)|dx=-\int_0^k f(x)dx+\int_k^1 f(x)dx$**이므로**

$$\int_0^1|f(x)|dx-\int_0^1 f(x)dx=-\int_0^k f(x)dx+\int_k^1 f(x)dx-\left\{\int_0^k f(x)dx+\int_k^1 f(x)dx\right\}$$

$$=-2\int_0^k f(x)dx=\frac{1}{81} \qquad \therefore \int_0^k f(x)dx=-\frac{1}{162}$$

**그런데** $\int_0^k f(x)dx=\int_0^k (x^2-kx)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}kx^2\right]_0^k=-\frac{1}{6}k^3=-\frac{1}{162}$**이므로**

$k^3=\frac{1}{27} \qquad \therefore k=\frac{1}{3}$

**5.** $\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=3$**을 만족시키는 상수** $a$, $b$**의 합** $a+b$**의 값은?**

① $-3$ ② $-2$ ③ $-1$ ④ $0$

**[정답]** ③

**[해설]** $x\to1$**일 때 (분모)**$\to0$**이므로 (분자)**$\to0$**이다.**

**따라서** $1+a+b=0$ $\therefore b=-a-1$

**이를 주어진 식에 대입하여 극한값을 구하면**

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-a-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)+a(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}(x+1+a)=2+a=3$$

$\therefore a=1$, $b=-2$

$\therefore a+b=-1$

**6. 집합** $X=\{1,2,3,4\}$**에서** $Y=\{5,6,7,8,9\}$**로의 함수** $f:X\to Y$ **중에서 다음을 모두 만족시키는** $f$**의 개수는?**

| | | |
|---|---|---|
| ㉠ $f(1)+f(2)=12$ | ㉡ $f(1)<f(3)$ | ㉢ $f(2)<f(4)$ |

① $20$ ② $25$ ③ $30$ ④ $35$

**[정답]** ②

**[해설] 조건 ㉠을 만족시키는** $f(1)$**과** $f(2)$**의 조합을 먼저 찾는다.**

$(i)$ $f(1)=5$, $f(2)=7$**인 경우**

$f(3)=6,7,8,9$, $f(4)=8,9$**가 가능하므로** $f$**의 개수는** $4\times2=8$

$(ii)$ $f(1)=6$, $f(2)=6$**인 경우**

$f(3)=7,8,9$, $f(4)=7,8,9$**가 가능하므로** $f$**의 개수는** $3\times3=9$

$(iii)$ $f(1)=7$, $f(2)=5$**인 경우**

$f(3)=8,9$, $f(4)=6,7,8,9$**가 가능하므로** $f$**의 개수는** $2\times4=8$

$(i),(ii),(iii)$**로부터** $f$**의 개수는** $8+9+8=25$

**7. 두 함수 $f(x)=3x+a$, $g(x)=ax+b$에 대하여 $(g\circ f)(x)=6x+1$일 때, $g^{-1}(1)$의 값은? (단, $a$, $b$는 상수)**

① $-3$ ② $-2$ ③ $2$ ④ $3$

**[정답]** ③

**[해설]** $g(f(x))=g(3x+a)=a(3x+a)+b=3ax+a^2+b=6x+1$에서

$3a=6$, $a^2+b=1$ $\quad \therefore a=2$, $b=-3$

$\therefore g(x)=2x-3$

이 때, $g^{-1}(1)=k$라 하면 $g(k)=1$이므로

$2k-3=1 \quad \therefore k=2$

**8. 곡선 $y=x^2-4x$와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?**

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{28}{3}$ ④ $\frac{32}{3}$

**[정답]** ④

**[해설]** $x^2-4x=0$의 두 근이 $x=0$, $4$이고 $0<x<4$에서 $f(x)<0$이므로

$$S=-\int_0^4 (x^2-4x)dx=-\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_0^4=-\left(\frac{64}{3}-32\right)=\frac{32}{3}$$

**9. 같은 종류의 사탕 $6$개를 $4$명의 사람에게 남김없이 나누어줄 때, 사탕을 한 개도 받지 못하는 사람이 $1$명인 경우의 수는?**

① $40$ ② $60$ ③ $80$ ④ $100$

**[정답]** ①

**[해설]** 먼저 사탕을 한 개도 받지 못할 $1$명을 고르는 방법의 수는 ${}_4C_1=4$

그 다음, 나머지 $3$명에게 최소 한 개의 사탕을 나누어주면 된다.

사탕 한 개씩을 기본적으로 지급하고 나머지 $3$개를 $3$명에게 중복을 허락하여 나누면 되므로

그 방법의 수는 ${}_3H_3={}_5C_3=10 \qquad \therefore 4\times 10=40$

**10. 좌표평면 위의 두 점 $A(-1,3)$, $B(5,12)$에 대하여 선분 $AB$를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표를 $(a,b)$라 할 때, $a+b$의 값은?**

① $7$ ② $8$ ③ $9$ ④ $10$

**[정답]** ①

**[해설] 내분점 공식을 이용한다.**

$$(a,b)=\left(\frac{1\cdot5+2\cdot(-1)}{1+2},\frac{1\cdot12+2\cdot3}{1+2}\right)=(1,6)$$

$$\therefore a+b=7$$

**11. $x\neq1$인 모든 실수 $x$에서 연속인 함수 $f(x)$가 $(x^3+1)f(x)=\frac{x}{x-1}-\frac{x^2}{2}$을 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은?**

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $1$

**[정답]** ①

**[해설] 주어진 식의 우변을 정리하면**

$$\frac{x}{x-1}-\frac{x^2}{2}=\frac{2x-x^2(x-1)}{2(x-1)}=\frac{-x^3+x^2+2x}{2(x-1)}=\frac{-x(x+1)(x-2)}{2(x-1)}$$

$$\therefore f(x)=\frac{-x(x+1)(x-2)}{2(x-1)(x^3+1)}=\frac{-x(x+1)(x-2)}{2(x-1)(x+1)(x^2-x+1)}$$

**$f(x)$는 모든 실수에서 연속이므로**

$$f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{-x(x+1)(x-2)}{2(x-1)(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{-x(x-2)}{2(x-1)(x^2-x+1)}=\frac{-3}{-12}=\frac{1}{4}$$

**12.** $\log_2 3 = a$, $\log_3 5 = b$**라 할 때,** $\log_{15} 80$**을** $a$, $b$**로 바르게 나타낸 것은?**

① $\dfrac{2+b}{a+b}$ ② $\dfrac{4+a}{b+ab}$ ③ $\dfrac{4+b}{a+ab}$ ④ $\dfrac{4+ab}{a+ab}$

**[정답]** ④

**[해설]** $\log_2 5 = \log_2 3 \cdot \log_3 5 = ab$**이므로**

$$\log_{15} 80 = \frac{\log_2 80}{\log_2 15} = \frac{\log_2 (16 \cdot 5)}{\log_2 (3 \cdot 5)} = \frac{4+ab}{a+ab}$$

**13. 다항함수** $f(x)$**가 모든 실수** $x$**에 대하여** $f(x) = 4x^3 + x\int_0^1 f(t)dt$**를 만족시킬 때,**

$f(1)$**의 값은?**

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8

**[정답]** ②

**[해설]** $\int_0^1 f(t)dt = k$ **(**$k$**는 상수) 로 잡으면**

$f(x) = 4x^3 + kx$**가 되며, 이를** $\int_0^1 f(t)dt = k$**에 대입하면**

$$\int_0^1 (4t^3 + kt)dt = \left[t^4 + \frac{1}{2}kt^2\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2}k = k \qquad \therefore k = 2$$

$\therefore f(x) = 4x^3 + 2x$

$\therefore f(1) = 4 + 2 = 6$

**14. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=2$이고 $a_{n+1}=2a_n-1$일 때, $a_{10}$의 값은?**

① $511$ ② $513$ ③ $1023$ ④ $1025$

**[정답] ②**

**[해설] 주어진 점화식을 변형하여 $a_{n+1}-k=2(a_n-k)$로 두고, 전개하면**

$a_{n+1}=2a_n-k$

**이것이 원래의 점화식과 동일하려면** $k=1$

$\therefore a_{n+1}-1=2(a_n-1)$

**따라서 수열 $\{a_n-1\}$은 첫째항이 $a_1-1=1$이고 공비가 $2$인 등비수열이므로**

$a_n-1=2^{n-1}$

$\therefore a_n=2^{n-1}+1$

$\therefore a_{10}=2^9+1=513$

**15. 정규분포 $N(20,4^2)$을 따르는 확률변수 $X$와 정규분포 $N(15,3^2)$을 따르는 확률변수 $Y$에 대하여 $P(16\le X\le 28)=P(a\le Y\le 18)$일 때, 상수 $a$의 값은?**

① $3$ ② $9$ ③ $15$ ④ $21$

**[정답] ②**

**[해설] 주어진 확률을 각각 표준화하여 나타내면**

$$P(16\le X\le 28)=P\left(\frac{16-20}{4}\le Z\le \frac{28-20}{4}\right)=P(-1\le Z\le 2)$$

$$P(a\le Y\le 18)=P\left(\frac{a-15}{3}\le Z\le \frac{18-15}{3}\right)=P\left(\frac{a-15}{3}\le Z\le 1\right)$$

**이 둘이 같으려면** $\dfrac{a-15}{3}=-2$**여야 한다. (정규분포 그래프의 대칭성 활용)**

$\therefore a=9$

**16. 실수 $x$에 대하여 두 조건 $p$, $q$를 각각 $p:(x-3)(x+2)\ge 0$, $q:|x-8|<a$라 할 때, $p$는 $q$이기 위한 필요조건이 되도록 하는 자연수 $a$의 최댓값은?**

① $1$ ② $3$ ③ $5$ ④ $7$

**[정답]** ③

**[해설] 조건 $p$가 나타내는 범위는 $x\ge 3$, $x\le -2$이고,**

**조건 $q$가 나타내는 범위는 $8-a<x<8+a$이다. 이는 $8$을 중심으로 양 옆으로 $a$만큼 벌린, 길이 $2a$의 구간이다.**

**이 때, $q$의 범위가 $p$의 범위 안에 포함되어야 하므로 $q$의 범위는 결국 $x\ge 3$의 범위 안에 들어가야 함을 알 수 있다.**

**즉 $q$의 범위의 왼쪽 끝 $8-a$가 $3$보다 크거나 같으면 되므로**

$8-a\ge 3 \qquad \therefore a\le 5$

**따라서 자연수 $a$의 최댓값은 $5$이다.**

**17. $x$에 대한 방정식 $x^n-10x^{n-1}+x^2-x+1=0$이 $n$개의 근 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n$을 가질 때, $(10-\alpha_1)(10-\alpha_2)(10-\alpha_3)\dots(10-\alpha_n)$의 값은?**

① $91$ ② $89$ ③ $111$ ④ $109$

**[정답]** ①

**[해설] 방정식 $x^n-10x^{n-1}+x^2-x+1=0$의 근이 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n$이므로,**

$10-\alpha_1, 10-\alpha_2, 10-\alpha_3, \dots, 10-\alpha_n$**을 근으로 갖는 방정식은**

$x^n-10x^{n-1}+x^2-x+1=0$**에 $x$ 대신 $10-x$를 대입한 방정식이 된다.**

**그리고 우리는 그 $n$개의 근의 곱을 구하면 되므로**

**근과 계수의 관계에 의해, 새로 구한 방정식의 상수항만 관찰하면 된다.**

**즉 $(10-x)^n-10(10-x)^{n-1}+(10-x)^2-(10-x)+1=0$에서**

**좌변의 식의 상수항을 계산하면**

$10^n-10\cdot 10^{n-1}+10^2-10+1=91$

**따라서 근과 계수의 관계에 의해** $(10-\alpha_1)(10-\alpha_2)(10-\alpha_3)\dots(10-\alpha_n)=\dfrac{91}{1}=91$

**18. 방정식** $x^3 = 3x^2 - 4 + a$**가 서로 다른 두 개의 양근과 하나의 음근을 갖도록 하는 모든 정수** $a$**의 값들의 합은?**

① $4$ ② $6$ ③ $8$ ④ $10$

**[정답]** ②

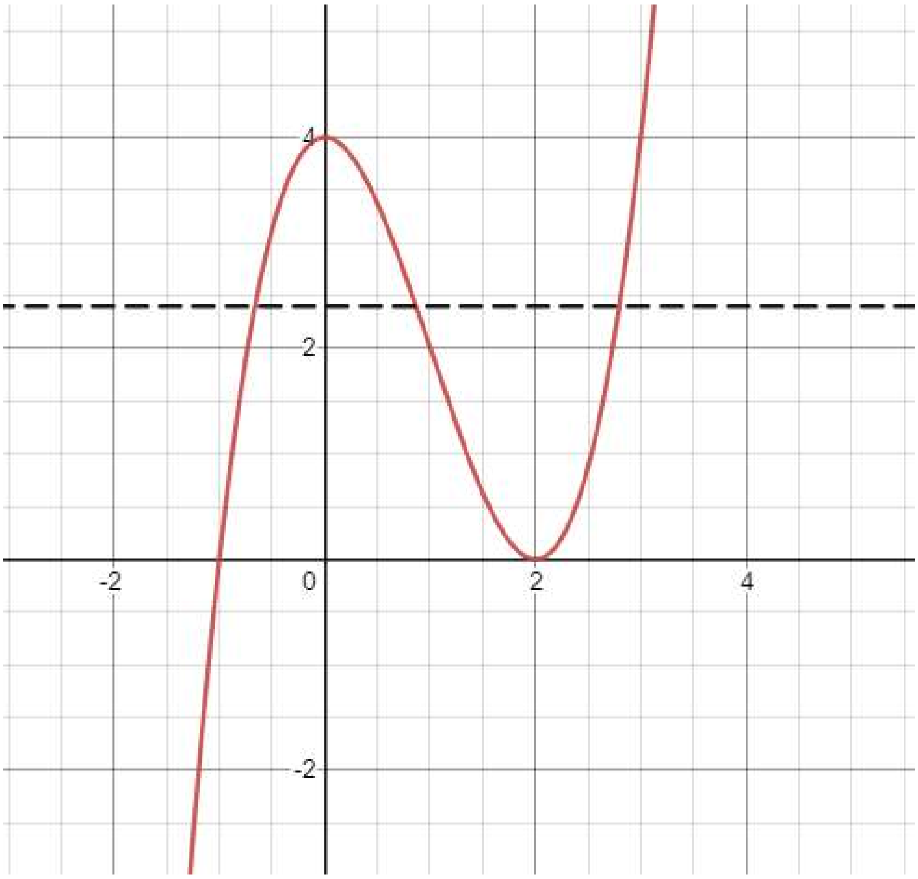
**[해설] 주어진 식을** $x^3 - 3x^2 + 4 = a$**로 변형하면,**

**삼차함수** $y = x^3 - 3x^2 + 4$**와 직선** $y = a$**의 교점이** $x < 0$**에서 한 개,** $x > 0$**에서 두 개가 생기도록 직선** $y = a$**를 그으면 된다.**

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$**로 두면** $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$**이므로**

$y = f(x)$**는** $x = 0$**에서 극대,** $x = 2$**에서 극소이며,**

$f(0) = 4$**,** $f(2) = 0$**이므로 이를 참고하여** $y = f(x)$**의 그래프를 그리면 아래와 같다.**




**즉** $y = a$**가** $y = f(x)$**의 극댓값과 극솟값 사이에 위치하게 하면 문제의 조건을 만족하게 됨을 알 수 있으므로,**

$a$**의 범위는** $0 < a < 4$

**따라서 모든 정수** $a$**의 값의 합은** $1 + 2 + 3 = 6$

**19. 다항함수 $y=f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.**

| |
|---|
| ㉠ **모든 실수 $x$, $y$에 대하여** $f(x+y)=f(x)+f(y)$ ㉡ $f'(0)=2$ |

**이 때, $\dfrac{f'(1)}{f(1)}$의 값은?**

① $\dfrac{1}{2}$ ② $1$ ③ $\dfrac{1}{4}$ ④ $4$

**[정답]** ②

**[해설]** ㉠**의 식에** $x=0$, $y=0$**을 대입하면**

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\quad \therefore f(0)=0$

**또, 미분계수의 정의에 의해** $f'(x)$**를 구해 보면**

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} \quad (\because f(0)=0)$$

$$=f'(0) \quad \text{(미분계수의 정의)}$$

**즉** $f'(x)=f'(0)=2$**이고** $f(0)=0$**이므로**

$f(x)=2x$

$\therefore \dfrac{f'(1)}{f(1)}=\dfrac{2}{2}=1$

**20. 이차방정식** $x^2+5x+4=0$**의 두 근을** $\alpha$, $\beta$**라 할 때,** $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$**을 구하면?**

① $-3$ ② $-5$ ③ $-7$ ④ $-9$

**[정답]** ④

**[해설]** $x^2+5x+4=(x+1)(x+4)=0$**에서** $x=-1$, $-4$

**즉 두 근이** $-1$, $-4$**이므로**

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\sqrt{-1}+\sqrt{-4})^2=(i+2i)^2=(3i)^2=-9$