2021년 제2차 경찰공무원(순경) 수학 해설

01. ②	02. ④	03. ①	04. ③	05. ②	06. ③	07. ①	08. ②	09. ②	10. ④
11. ④	12. ①	13. ②	14. ③	15. ④	16. ②	17. ③	18. ①	19. ③	20. ④

1.【정답】②

$(x+y)(y+z)(z+x)=(4-z)(4-x)(4-y)$

$=64+4(xy+yz+zx)-16(x+y+z)-xyz=64-56-64+12=-44$

2.【정답】④

$\alpha^2-5\alpha+5=0,\ \beta^2-5\beta+5=0$

$\alpha^3-5\alpha^2+5\alpha=0,\ \beta^3-5\beta^3+5\beta=0$

$5\alpha^2-\alpha^3=5\alpha,\ 5\beta^2-\beta^3=5\beta$

$(5\alpha^2-\alpha^3-\beta)(5\beta^2-\beta^3-\alpha)=(5\alpha-\beta)(5\beta-\alpha)=25\alpha\beta-5(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta$

$=26\alpha\beta-5((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta)=26\cdot5-5(5^2-2\cdot5)=130-75=55$

3.【정답】①

$(2x+1)^6=(4x^2-1)Q(x)+R(x)$

$(2x+1)^6=(2x+1)(2x-1)Q(x)+ax+b$

$x=\frac{1}{2}$대입하면 $2^6=\frac{1}{2}a+b$

$x=-\frac{1}{2}$대입하면 $0=-\frac{1}{2}a+b$

$b=2^5=32,\ a=2b=64$

$R(x)=64x+32,\ R(-1)=-64+32=-32$

4.【정답】③

$y^2+4x=25-x^2+4x=-(x^2-4x+4)+29$

$=-(x-2)^2+29$

$y^2=25-x^2\geq0$이므로 x의 범위 $-5\leq x\leq5$이다.

최댓값은 $x=2$일 때 29

최솟값은 $x=-5$일 때 -20이다.

$29-20=9$

5. 【정답】 ②

$\mathrm{B}(2,\ 4)$를 직선 $y=x$에 대칭이동한 점 $\mathrm{B}'(4,\ 2)$라 하면

$\overline{\mathrm{AB}'}$가 직선 $y=x$와 만나는 점이 P가 될 때 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$가 최소가 된다.

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값 $\sqrt{(4-(-3))^2+(2-1)^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$이다.

6. 【정답】 ③

$f(x)=a$ 또는 $f(x)=a+2$

서로 다른 세 실근을 가지므로 $a+2$가 이차함수 $f(x)$의 꼭짓점의 y좌표가 되어야한다.

$f(x)=-x^2+2x+7=-(x^2-2x+1)+8=-(x-1)^2+8$

$a+2=8,\ a=6$

7. 【정답】 ①

원점에서 원 $x^2+(y-a)^2=9$에 그은 두 접선의 접점 중 하나를 P라 하면

두 접선이 수직하므로 원점, $(0,\ a)$, P를 꼭짓점으로 하는 삼각형은 직각 이등변 삼각형이 된다. 따라서 $a=3\sqrt{2}$이다.

8. 【정답】 ②

항등식 $(4x^3-2x+1)^5=a_1+\sum_{n=1}^{15}a_{n+1}x^n$

양변에 $x=1$을 대입하면 $3^5=a_1+a_2+\cdots+a_{15}+a_{16}$

양변에 $x=-1$을 대입하면 $-1=a_1-a_2+\cdots+a_{15}-a_{16}$

윗식에서 아랫식을 빼면 $3^5+1=2(a_2+a_4+\cdots+a_{16})$

$$\sum_{n=1}^{8}a_{2n}=a_2+a_4+\cdots+a_{16}=\frac{3^5+1}{2}=\frac{244}{2}=122$$

9. 【정답】 ②

$$y=\frac{ax+1}{-x+b}=\frac{-ax-1}{x-b}=\frac{-a(x-b)-ab-1}{x-b}=\frac{-ab-1}{x-b}-a$$

$b=7,\ a=-2$

$a+b=-2+7=5$

10. 【정답】 ④

$x^2+2ax+a^2+2a=mx+n$

$x^2+(2a-m)x+a^2+2a-n=0$

$D=4a^2-4am+m^2-4(a^2+2a-n)=0$

$D=(-4m-8)a+m^2+4n=0$

$m=-2,\ n=-1$

$y=-2x-1$이므로 직선 $2x+y+1=0$과 $(8,3)$사이의 거리

$d=\frac{|16+3+1|}{\sqrt{5}}=\frac{20}{\sqrt{5}}=4\sqrt{5}$

11. **【정답】** ④

$\sqrt{8+a}-\sqrt{2+7}=0,\ a=1$

$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+7}}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2}\frac{3(x-2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+7})}$

$=\frac{3}{4\cdot6}=\frac{1}{8}$

$\frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{1}{8}}=8$

12. **【정답】** ①

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{3x^2}{x+2x}+3=0+3=3$

$f(0)=\lim_{x\to0-}f(x)=a+2$이므로 $a+2=3,\ a=1$

13. **【정답】** ②

$f(3)=2$

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-2}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{6}f'(3)=2,\ f'(3)=12$

점 $(3,f(3))$에서의 접선의 방정식 $y-2=12(x-3),\ y=12x-34$

14. **【정답】** ③

$0\le t\le5$에서 $x_2\ge x_1$이므로

$x_2-x_1=3t^2+24t-2t^3+6t^2=-2t^3+9t^2+24t$

미분하면 $-6t^2+18t+24=-6(t^2-3t-4)=6(t-4)(t+1)$

따라서 최댓값은 $t=4$일 때 $-2\cdot4^3+9\cdot4^2+24\cdot4=112$

15. **【정답】** ④

$f(x+y)-f(x)=f(y)+2xy-1$

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\frac{f(y)-1}{y}+2x$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{f(y)-1}{y}+2x\right)$$

$$f'(x)=f'(0)+2x$$

$$f(x)=x^2+f'(0)x+C$$

$f(0+0)=f(0)+f(0)-1$로부터 $f(0)=1$이므로 $C=1$

$f(2)=f'(2)$이므로 $4+2f'(0)+1=4+f'(0)$

$f'(0)=-1$

$f'(x)=2x-1$이므로 $f'(2)=3$

16. **【정답】** ②

문제의 식의 양변을 미분하면

$xf'(x)=2x^3-2x^2-4x$, $f'(x)=2x^2-2x-4=2(x-2)(x+1)$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=2$이다.

$$f(x)=\frac{2}{3}x^3-x^2-4x+1$$

$$\int_0^2 \frac{2}{3}x^3-x^2-4x+1dx=\left[\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{3}x^3-2x^2+x\right]_0^2=\frac{8}{3}-\frac{8}{3}-8+2=-6$$

17. **【정답】** ③

$$\int_{-1}^{3}|f(x)|dx=\int_{-1}^{1}-2x^2+2dx+\int_{1}^{3}x^2-1dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{1}^{3}=-\frac{4}{3}+4+\frac{26}{3}-2=\frac{28}{3}$$

18. **【정답】** ①

A의 원소가 1개일 때 : ${}_5\mathrm{C}_0$ (2, 3, 4, 5, 6 중 하나도 뽑지 않는 경우의 수)

A의 원소가 2개일 때 : ${}_5\mathrm{C}_1$ (2, 3, 4, 5, 6 중 숫자 한 개를 뽑는 경우의 수)

A의 원소가 3개일 때 : ${}_5\mathrm{C}_2$ (2, 3, 4, 5, 6 중 숫자 두 개를 뽑는 경우의 수)

A의 원소가 4개일 때 : ${}_5\mathrm{C}_3$ (2, 3, 4, 5, 6 중 숫자 세 개를 뽑는 경우의 수)

A의 원소가 5개일 때 : ${}_5\mathrm{C}_4$ (2, 3, 4, 5, 6 중 숫자 네 개를 뽑는 경우의 수)

따라서 순서쌍 (A, B)의 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_0+{}_5\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_4=1+5+10+10+5=31$이다.

19. 【정답】 ③

5의 눈이 한번도 나오지 않는 경우는 25가지

이때 두 눈의 수의 합이 3의 배수인 경우는

$(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(3, 6)$, $(6, 3)$, $(6, 6)$의 8가지이므로

구하는 확률은 $\frac{8}{25}$이다.

20. 【정답】 ④

확률변수 X는 이항분포 $B\left(750, \frac{1}{2}\right)$를 따른다.

$a = E(X) = \frac{750}{2} = 375$, $b = V(X) = \frac{375}{2}$

$a + 2b = 375 + 375 = 750$