

1. [정답] ②

$x + y + z = 4$ 로부터 $x + y = 4 - z$, $y + z = 4 - x$, $z + x = 4 - y$ 이므로

$$\begin{aligned}(x + y)(y + z)(z + x) &= (4 - x)(4 - y)(4 - z) \\ &= 64 - 16(x + y + z) + 4(xy + yz + zx) - xyz \\ &= 64 - 16 \cdot 4 + 4 \cdot (-14) - (-12) = -44\end{aligned}$$

2. [정답] ④

근과 계수의 관계로부터 $\alpha + \beta = 5$, $\alpha\beta = 5$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 5^2 - 2 \cdot 5 = 15$$

또한, $x^2 - 5x + 5 = 0$ 의 두 근이 α , β 이므로

$$\alpha^2 - 5\alpha + 5 = 0, \beta^2 - 5\beta + 5 = 0$$

따라서 $\alpha^2 = 5\alpha - 5$, $\beta^2 = 5\beta - 5$ 이므로

$$\alpha^3 = \alpha^2\alpha = (5\alpha - 5)\alpha = 5\alpha^2 - 5\alpha, \beta^3 = 5\beta^2 - 5\beta$$

$$\therefore 5\alpha^2 - \alpha^3 = 5\alpha^2 - (5\alpha^2 - 5\alpha) = 5\alpha, 5\beta^2 - \beta^3 = 5\beta$$

$$\begin{aligned}\therefore (5\alpha^2 - \alpha^3 - \beta)(5\beta^2 - \beta^3 - \alpha) &= (5\alpha - \beta)(5\beta - \alpha) \\ &= 26\alpha\beta - 5(\alpha^2 + \beta^2) \\ &= 26 \cdot 5 - 5 \cdot 15 = 55\end{aligned}$$

3. [정답] ①

$(2x + 1)^6 = (4x^2 - 1)Q(x) + ax + b$ 라고 두고,

양변에 $x = \frac{1}{2}$ 을 대입하면 $2^6 = \frac{1}{2}a + b$

또, 양변에 $x = -\frac{1}{2}$ 을 대입하면 $0 = -\frac{1}{2}a + b$

두 식을 변끼리 더하면

$$2b = 2^6 = 64 \quad \therefore b = 32, a = 64$$

$$\therefore R(x) = 64x + 32$$

$$\therefore R(-1) = -64 + 32 = -32$$

4. [정답] ③

$$x^2 + y^2 = 25 \text{에서 } y^2 = 25 - x^2$$

$$\therefore y^2 + 4x = -x^2 + 4x + 25 = -(x-2)^2 + 29$$

한편, $x^2 \geq 0$ 이고, $y^2 = 25 - x^2 \geq 0$ 이므로 $x^2 \leq 25$

$$\text{즉 } 0 \leq x^2 \leq 25 \text{이므로 } -5 \leq x \leq 5$$

이 범위에서 $-(x-2)^2 + 29$ 의 최댓값은 $x=2$ 일 때 29,

최솟값은 $x=-5$ 일 때 -20이므로

최댓값과 최솟값의 합은 9이다.

5. [정답] ②

두 점이 모두 직선 $y=x$ 에 대해 같은 방향에 있으므로

(모두 $y=x$ 의 윗부분에 있다)

두 점 중 하나를 $y=x$ 에 대해 대칭이동시킨 뒤

이동시키지 않은 점과 이동시킨 점의 직선거리를 구하면 최단거리이다.

여기서는 점 B 를 대칭이동해 보자. 이동시키면 $B'(4, 2)$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{B'P} \geq \overline{AB'} = \sqrt{7^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}$$

6. [정답] ③

$$\{f(x) - a\}\{f(x) - (a+2)\} = 0 \text{에서 } f(x) = a \text{ 또는 } f(x) = a+2$$

$$\text{한편, } f(x) = -x^2 + 2x + 7 = -(x-1)^2 + 8 \text{이므로}$$

그래프로 생각하면 구하는 것은 위로 볼록한 포물선과

두 직선 $y=a$, $y=a+2$ 의 교점의 x 좌표이며,

서로 다른 세 실근을 가진다고 했으므로 두 직선 중 하나는 포물선과 서로 다른 두 점에서 만나고, 다른 하나는 포물선과 접해야 한다.

위치 관계를 생각하면 더 높이 있는 $y=a+2$ 가 포물선에 접하면 되므로

꼭짓점의 y 좌표가 8임을 고려하면,

$$a+2=8 \quad \therefore a=6$$

7. [정답] ①

원의 중심의 좌표가 $(0, a)$

이므로

원점에서 그은 두 접선이 수직이라면 오른쪽 그림과 같이 된다.

한편, 접선이 수직이라는 가정과 원의 접선의 성질에 의해

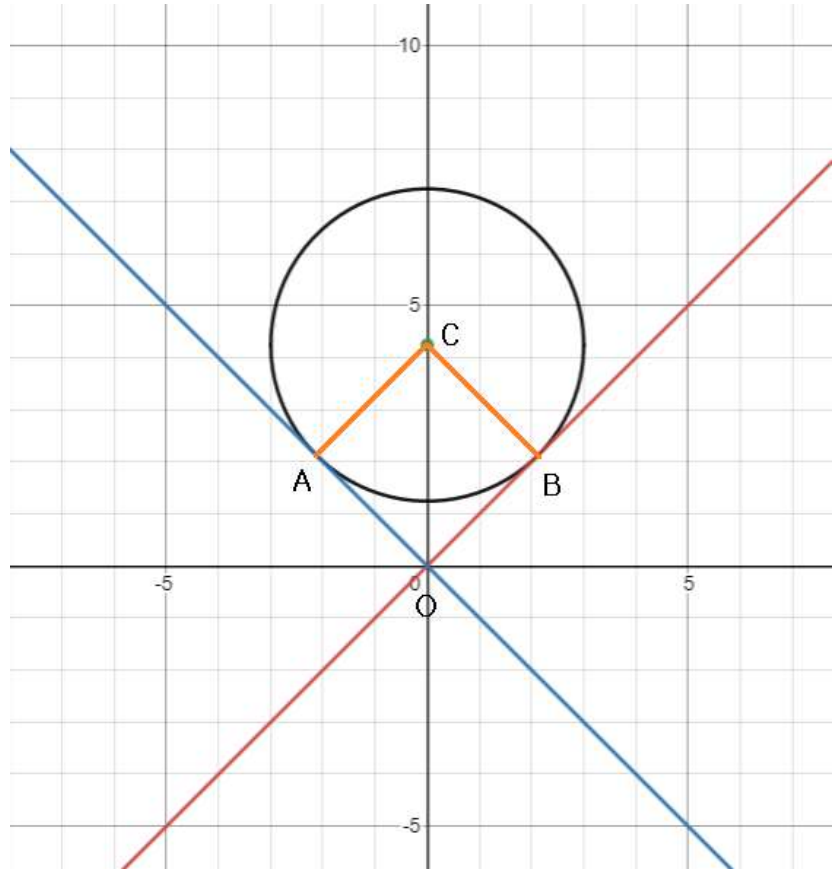
$\angle AOB, \angle CAO, \angle CBO$ 모두 90° 이고,

$\overline{AC} = \overline{BC}$ 이므로

$\square AOB C$ 는 정사각형이다.

따라서

$$\overline{OC} = a = \sqrt{2} \cdot \overline{AC} = 3\sqrt{2}$$



8. [정답] ②

우변을 전개하면 $a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \dots + a_{16}x^{15}$

이제 주어진 항등식에 $x = 1$ 을 대입하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{15} + a_{16} = 3^5 = 243 \dots \textcircled{1}$$

또, $x = -1$ 을 대입하면

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{15} - a_{16} = (-1)^5 = -1 \dots \textcircled{2}$$

① - ②하면

$$2(a_2 + a_4 + \dots + a_{16}) = 244$$

$$\therefore a_2 + a_4 + \dots + a_{16} = \sum_{n=1}^8 a_{2n} = 122$$

9. [정답] ②

유리함수의 점근선이 $x=7$, $y=2$ 라는 것이다.

분모에 $x=7$ 을 대입했을 때 0이 나와야 하므로 $b=7$

$$\text{또, } y = \frac{ax+1}{-x+7} = \frac{-ax-1}{x-7} = \frac{-a(x-7)-7a-1}{x-7} = \frac{-7a-1}{x-7} - a \text{이므로}$$

$$-a=2 \quad \therefore a=-2$$

$$\therefore a+b=5$$

10. [정답] ④

직선과 곡선이 접하므로, 연립한 뒤 (판별식)=0으로 둔다.

$$mx+n=x^2+2ax+a^2+2a \text{에서}$$

$$x^2+(2a-m)x+(a^2+2a-n)=0$$

$$\begin{aligned} D &= (2a-m)^2 - 4(a^2+2a-n) = 4a^2 - 4am + m^2 - 4a^2 - 8a + 4n \\ &= -4a(m+2) + (m^2+4n) = 0 \end{aligned}$$

이 식이 a 값에 관계없이 성립하므로

$$m+2=0, \quad m^2+4n=0 \quad \therefore m=-2, \quad n=-1$$

따라서 직선의 방정식은 $y=-2x-1$ 즉 $2x+y+1=0$ 이므로

$$\text{이것과 점 } (8, 3) \text{ 사이의 거리는 } \frac{|2 \cdot 8 + 3 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$$

11. [정답] ④

주어진 극한은 $x \rightarrow 2$ 일 때 분모가 0으로 수렴하므로 분자도 0으로 수렴한다.

$$\text{즉 } \sqrt{4 \cdot 2 + a} - \sqrt{2+7} = \sqrt{8+a} - 3 = 0 \quad \therefore a=1$$

이 때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - \sqrt{x+7}}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{4x+1})^2 - (\sqrt{x+7})^2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{4x+1} + \sqrt{x+7})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-6}{(x-2)(x+2)(\sqrt{4x+1} + \sqrt{x+7})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x+2)(\sqrt{4x+1} + \sqrt{x+7})} \\ &= \frac{3}{4 \cdot 6} = \frac{1}{8} = b \quad \therefore \frac{a}{b} = 8 \end{aligned}$$

12. [정답] ①

$$f(0) = a + 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{3x^2}{x-2x} + 3 \right) = \lim_{x \rightarrow 0+} (-3x + 3) = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{3x^2}{x+2x} + 3 \right) = \lim_{x \rightarrow 0+} (x + 3) = 3$$

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 \text{ 이므로}$$

$$a + 2 = 3 \quad \therefore a = 1$$

13. [정답] ②

주어진 극한은 $x \rightarrow 3$ 일 때 분모가 0으로 수렴하므로 분자도 0으로 수렴한다.

$$\text{즉 } f(3) = 2 \text{ 이고,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \cdot \frac{1}{x + 3} \right) = f'(3) \cdot \frac{1}{6} = 2 \text{ 이므로}$$

$$f'(3) = 12$$

이 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(3, f(3))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = f'(3)(x - 3) + f(3) = 12(x - 3) + 2 = 12x - 34$$

14. [정답] ③

두 점의 위치의 차이 $x_1 - x_2 = 2t^3 - 9t^2 - 24t = f(t)$ 라 하면,

거리가 최대이면 되므로 주어진 범위에서 $f(t)$ 의 절댓값이 최대가 되면 된다.

($f(t)$ 가 양수이면 x_1 이 오른쪽에, 음수이면 x_2 가 오른쪽에 있는 것)

$$f'(t) = 6t^2 - 18t - 24 = 6(t + 1)(t - 4) \text{ 이므로}$$

$y = f(t)$ 는 $t = -1$ 에서 극대, $t = 4$ 에서 극소,

따라서 $0 \leq t \leq 5$ 범위에서는 $t = 4$ 일 때 $f(t)$ 값이 최소이며

이 값의 절댓값이 정답

$$\therefore |f(4)| = |2 \cdot 64 - 9 \cdot 16 - 24 \cdot 4| = 112$$

15. [정답] ④

주어진 항등식에 $x = 0, y = 0$ 을 대입하면

$$f(0) = 2f(0) - 1 \quad \therefore f(0) = 1$$

한편 도함수의 정의로부터

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) + 2xh - 1 - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 2xh - 1}{h} \quad (\because f(0) = 1) \\ &= 2x + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 2x + f'(0) \end{aligned}$$

이 식의 양변에 부정적분을 취하면

$$f(x) = x^2 + f'(0)x + 1 \quad (\because f(0) = 1)$$

한편 주어진 두 번째 식에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 분모가 0으로 수렴하므로

$$\text{분자도 0으로 수렴, 즉 } f(2) = f'(2)$$

따라서 $f'(x) = 2x + f'(0)$ 과 $f(x) = x^2 + f'(0)x + 1$ 에 $x = 2$ 를 대입하면

$$f'(2) = 4 + f'(0), \quad f(2) = 4 + 2f'(0) + 1$$

두 식의 값이 같으므로

$$4 + f'(0) = 4 + 2f'(0) + 1 \quad \therefore f'(0) = -1$$

$$\text{즉 } f'(x) = 2x - 1 \text{이므로 } f'(2) = 3$$

16. [정답] ②

주어진 식의 양변을 미분하면

$$xf'(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x \quad \therefore f'(x) = 2x^2 - 2x - 4 = 2(x-2)(x+1)$$

따라서 극값을 갖는 두 지점 $\alpha = -1, \beta = 2$

한편 $f(0) = 1$ 을 이용하면 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 1$ 로 구할 수 있으므로

$$\begin{aligned} \int_0^\beta f(x)dx &= \int_0^2 \left(\frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 1 \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x \right]_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{8}{3} - 8 + 2 = -6 \end{aligned}$$

17. [정답] ③

$y = 2x^2 - 2 = 2(x^2 - 1)$ 은 구간 $(-1, 1)$ 에서 0보다 작고,

$y = -x^2 + 1$ 도 구간 $(1, \infty)$ 에서 0보다 작으므로

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 |f(x)| dx &= - \int_{-1}^3 f(x) dx = - \int_{-1}^1 (2x^2 - 2) dx - \int_1^3 (-x^2 + 1) dx \\ &= -4 \int_0^1 (x^2 - 1) dx + \int_1^3 (x^2 - 1) dx \\ &= -4 \left[\frac{1}{3} x^3 - x \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3} x^3 - x \right]_1^3 \\ &= -4 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) + 6 - \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{28}{3} \end{aligned}$$

18. [정답] ①

주어진 조건을 해석하면, 원소 1은 무조건 A 에 포함되어 있는 상황에서,
나머지 5개의 서로 다른 원소 2부터 6은

집합 A 와 B 중 어느 한 곳만을 반드시 선택하여야 한다.

따라서 5개의 원소가 각각 선택할 수 있는 것이 A, B 2가지이고,

여기서 5개 원소 모두 집합 A 를 택하는 경우($=B$ 가 공집합)는 제외해야 하므로
구하는 순서쌍의 개수는 $2^5 - 1 = 31$

19. [정답] ③

모든 경우의 수는 $5 \cdot 5 = 25$,

두 눈의 수의 합이 3의 배수인 경우는 $(1, 2), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (4, 2),$

$(3, 6), (6, 3), (6, 6)$ 의 8가지이므로 구하는 확률은 $\frac{8}{25}$

20. [정답] ④

확률변수 X 는 이항분포 $B(750, \frac{1}{2})$ 을 따르므로

$$E(X) = a = 750 \cdot \frac{1}{2} = 375, \quad V(X) = b = 750 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{375}{2} \quad \therefore a + 2b = 750$$