1. [정답] ③

A가 이기는 경우는 다음과 같다.

(i) 뒷면이 연속으로 2회 나오는 경우: $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

(ii) 뒷면 1회, 앞면 1회 나온 후 뒷면이 나오는 경우: ${}_2C_1 \cdot (\frac{1}{2})^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

(iii) 뒷면 1회, 앞면 2회 나온 후 뒷면이 나오는 경우: ${}_3C_1 \cdot (\frac{1}{2})^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$

(iv) 뒷면 1회, 앞면 3회 나온 후 뒷면이 나오는 경우: ${}_4C_1 \cdot (\frac{1}{2})^4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} = \frac{13}{16}$

2. [정답] ③

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left\{(\frac{2}{n}+1)^3 + (\frac{4}{n}+1)^3 + (\frac{6}{n}+1)^3 + \dots + (\frac{2n}{n}+1)^3\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{n}(\frac{2k}{n}+1)^3 = \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}(\frac{2k}{n}+1)^3$$

$$= \frac{3}{2}\int_1^3 x^3 dx = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^3 = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}(81-1) = 30$$

3. [정답] ③

$a-1>0$이므로

$$\begin{aligned} 8a + \frac{2}{a-1} &= 8(a-1) + \frac{2}{a-1} + 8 \\ &\geq 2\sqrt{8(a-1)\cdot\frac{2}{a-1}} + 8 \\ &= 2\cdot 4 + 8 = 16 \end{aligned}$$

따라서 최솟값은 16

4. [정답] ②

$996=x$**로 치환하면, 주어진 식은**

$$\frac{x^3-3x-2}{x(x+2)+1}=\frac{(x+1)(x^2-x-2)}{x^2+2x+1}=\frac{(x+1)^2(x-2)}{(x+1)^2}=x-2=994$$

5. [정답] ④

두 직선 l_1, l_2**가** x**축의 양의 방향과 이루는 각을 각각** a, b**라 하면**

$\tan a=-1,\ \tan b=\frac{4}{3}$

따라서 두 직선이 이루는 각을 θ**라 할 때,**

$$\tan\theta=|\tan(a-b)|=\left|\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}\right|=\frac{-1-\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{3}}=7$$

θ**에 대해 밑변이** 1, **높이가** 7**인 직각삼각형을 가정하면 빗변은** $5\sqrt{2}$**이므로**

$$\sin\theta=\frac{7}{5\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

6. [정답] ③

공차를 d**라 하면**

$a_5=1+4d<30$

$4d<29\qquad\therefore d<\frac{29}{4}=7.25$

또, $a_9=1+8d>50$**에서**

$8d>49\qquad\therefore d>\frac{49}{8}=6.125$

이 범위를 만족하는 정수 $d=7$**이므로,**

$a_n=1+7(n-1)=7n-6$

이 때, $a_n=7n-6=190$**에서** $\quad n=196\div 7=28$

7. [정답] ④

조립제법을 쓰거나, 다항식을 직접 나눗셈하면

$x^4-1=(x-2)(x^3+2x^2+4x+8)+15$**임을 얻는다.**

따라서 $a_0=8$, $a_1=4$, $a_2=2$, $a_3=1$**이므로**

$a_0+9a_2=8+18=26$

8. [정답] ①

a_1, a_2, a_3, a_4**의 양의 제곱근이 모두 자연수이므로**

a_1, a_2, a_3, a_4**는 모두 제곱수이다.**

그런데 조건 (가)로부터, 두 제곱수의 합이 13**이 되는 경우는** $4+9$**이므로**

$a_1=4$, $a_2=9$

따라서 집합 B**는** $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{9}=3$**을 원소로 갖는다.**

그런데 조건 (나)로부터 집합 B**도** 4, 9**를 원소로 가져야 하므로**

$\sqrt{a_3}=4$, $\sqrt{a_4}=9$**여야 한다.**

$\therefore a_3=16$, $a_4=81$

$\therefore a_4-a_1=81-4=77$

9. [정답] ①

주어진 식을 전개하여 x^3**항을 만드는 경우는**

(i) $(1+x^4)$**에서** x^2**항을 뒤의** $2x$**와 곱하는 경우:** ${}_4C_2 \cdot 2=12$

(ii) $(1+x^4)$**에서** x^3**항을 뒤의** 3**과 곱하는 경우:** ${}_4C_3 \cdot 3=12$

$\therefore 12+12=24$

10. [정답] ①

이차방정식의 계수가 모두 실수이므로,

다른 한 근 β는 α의 켤레복소수 $1-i$이다.

즉 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=2$이므로

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+\left(\frac{1}{\beta}\right)^3=\frac{\alpha^3+\beta^3}{(\alpha\beta)^3}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{2^3}$$

$$=\frac{2^3-3\cdot2\cdot2}{8}=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$$

11. [정답] ④

$\lim_{x\to1+}g(x)=4$, $\lim_{x\to1-}g(x)=3$**이므로** $g(x)$**는** $x=1$**에서 불연속이다.**

그런데 $h(x)=f(x)g(x)$**는** $x=1$**에서 연속이어야 하므로**

$f(1)=0$**이면 된다.**

또한 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-2x}=2$**로부터** $f(x)$**는 최고차항의 계수가** 2**인 이차식이고,**

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{2x-6}=m$**으로부터** $f(x)$**는** $x-3$**을 인수로 갖는다.**

종합하면 $f(x)=2(x-1)(x-3)$**이므로**

$$m=\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{2x-6}=\lim_{x\to3}\frac{2(x-1)(x-3)}{2(x-3)}=3-1=2$$

12. [정답] ②

주어진 식의 양변에 n **대신** $n-1$**을 대입하고,**

그 식을 주어진 식에서 빼면 좌변은 $2a_n+3$**만 남고,**

우변은 $(3n^2+2n)-\left\{3(n-1)^2+2(n-1)\right\}$

$$=(3n^2+2n)-(3n^2-4n+1)=6n-1$$

즉 $2a_n+3=b_n=6n-1$**이므로**

$2a_n=6n-4 \qquad \therefore a_n=3n-2$

이 때, $\dfrac{1}{a_n a_{n+1}} = \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-2} - \dfrac{1}{3n+1}\right)$이므로

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{5} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{13} - \frac{1}{16}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{16} = \frac{5}{16}$$

13. [정답] ①

$\int_{-1}^{1} f(x-2)dx = \int_{-3}^{-1} f(x)dx$, $\int_{-1}^{1} f(x+2)dx = \int_{1}^{3} f(x)dx$이므로

$\int_{-1}^{1} \{f(x-2) + f(x) + f(x+2)\}dx$

$= \int_{-3}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx = \int_{-3}^{3} f(x)dx$가 된다.

즉, $\int_{-3}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{1} (x^3 + 2x^2 + 7x + 8)dx$

$$= 2\int_{0}^{1} (2x^2 + 8)dx$$

$$= 2\left[\frac{2}{3}x^3 + 8x\right]_0^1 = 2 \cdot \frac{26}{3} = \frac{52}{3}$$

[참고] 이 아이디어가 떠오르지 않았을 경우, $f(x)$를 직접 잡아 양변의 계수비교를 통해 해결하는 수도 있다.

$f(x-2)$, $f(x)$, $f(x+2)$의 최고차항의 계수는 모두 같으므로,

$f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + c$의 형태가 되어야 함을 알 수 있다.

여기에 x 대신 $x-2$, $x+2$를 대입하여 전개한 후

우변의 $x^3 + 2x^2 + 7x + 8$과의 계수를 비교하면,

$f(x)$의 식을 구할 수 있다.

14. [정답] ①

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}-2\sin\theta\cos\theta$에서

$2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}\qquad\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$

또한

$$\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$=1-2(\sin\theta\cos\theta)^2=1-2\cdot(-\frac{1}{4})^2=\frac{7}{8}$$ 이므로

$\sin^4\theta+\cos^4\theta+3\sin\theta\cos\theta=\frac{7}{8}-\frac{3}{4}=\frac{1}{8}$

15. [정답] ②

쌍곡선의 정의에 의해 $\left|\overline{PF}-\overline{PF'}\right|=2\sqrt{4}=4$

또, 두 초점 사이의 거리 $\overline{FF'}=2\sqrt{4+5}=6$이므로

삼각형 PFF'의 둘레의 길이 $\overline{PF}+\overline{PF'}+\overline{FF'}=14$에서

$\overline{PF}+\overline{PF'}=8$

$\therefore \left|\overline{PF}^2-\overline{PF'}^2\right|=(\overline{PF}+\overline{PF'})(\left|\overline{PF}-\overline{PF'}\right|)=8\cdot4=32$

16. [정답] ②

확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+p=1\qquad\therefore p=\frac{1}{4}$

또, $E(X)=\frac{1}{2}a+4\cdot\frac{1}{4}+6p=\frac{1}{2}a+1+\frac{3}{2}=3\qquad\therefore a=1$

이 때 $E(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{2}+4^2\cdot\frac{1}{4}+6^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+4+9=\frac{27}{2}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{27}{2}-3^2=\frac{9}{2}$

17. [정답] ②

$f(x)=x^4-2x^3+1$**이라 하고 양변을 미분하면**

$f'(x)=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)$

이를 바탕으로 도함수의 그래프 개형을 생각하면,

$f(x)$**는** $x<\dfrac{3}{2}$**에서는 계속 감소하고(단** $x=0$**에서는** $f'(x)=0$**),**

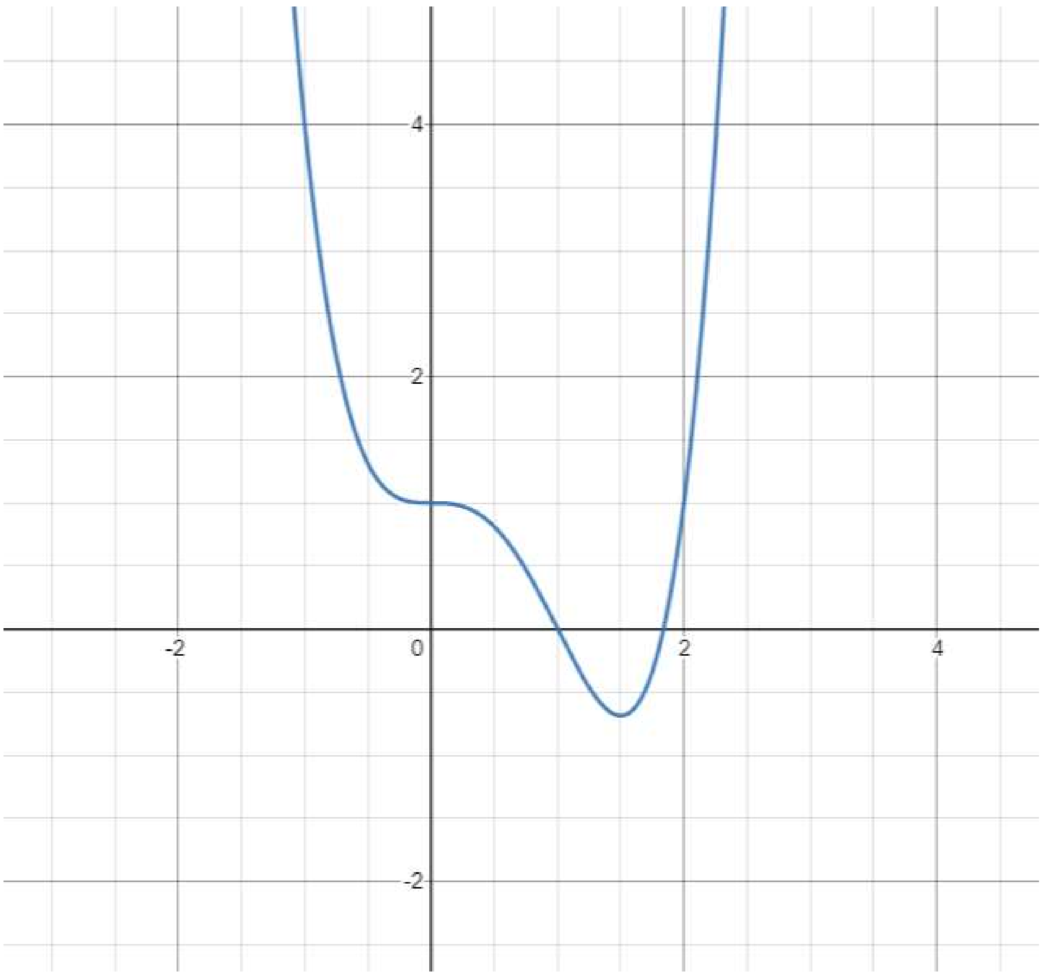
$x=\dfrac{3}{2}$**에서 극소,** $x>\dfrac{3}{2}$**에서는 계속 증가한다.**

$f(0)=1,\ f(\frac{3}{2})=(\frac{3}{2})^4-2\cdot(\frac{3}{2})^3+1=\frac{81}{16}-\frac{27}{4}+1=-\frac{11}{16}<0$**이므로**

$y=f(x)$**의 그래프는** x**축과의 교점이** 2**개**

따라서 서로 다른 실근의 개수는 2**개다.**

[참고] $y=x^4-2x^3+1$**의 그래프는 아래와 같다.**



18. [정답] ②

[풀이 1] 주어진 직각삼각형을 오른쪽 그림과 같이 두 개 맞대어 붙이면

$\overline{AB} = \overline{AC} = 2$,

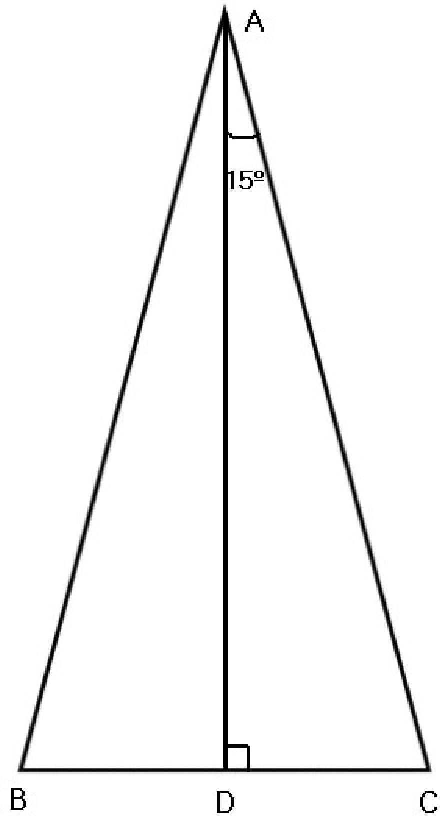
$\angle BAC = 2\angle CAD = 30^\circ$ 이므로

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin(\angle BAC)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

이는 직각삼각형 두 개의 넓이이므로

구하는 직각삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}$이다.



[풀이 2] 배각 공식 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ 활용

위 그림에서 $\cos 15^\circ = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{2}$이므로

$\overline{AD} = 2\cos 15^\circ$

따라서

$$\triangle ADC = \frac{1}{2}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AC}\cdot\sin 15^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\cos 15^\circ\cdot 2\sin 15^\circ$$

$$= 2\cos 15^\circ\sin 15^\circ$$

$$= \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

19. [정답] ①

주어진 영역의 넓이는 포물선·직선의 역함수로 둘러싸인 영역의 넓이와 같다.

두 함수의 역함수를 각각 구하면

$x^2=8y$에서 $y=\frac{1}{8}x^2$,

$x=8y-2$에서 $8y=x+2 \quad \therefore y=\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}$

두 그래프의 교점을 구하기 위해 연립하면

$\frac{1}{8}x^2=\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}$에서

$x^2-x-2=0, \quad (x+1)(x-2)=0 \quad \therefore x=-1,\ 2$

둘러싸인 부분에서는 직선이 포물선보다 위에 있으므로

$$S=\int_{-1}^{2}\left(-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}\right)dx=\frac{1}{8}\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$$

$$=\frac{1}{8}\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{1}{8}\left\{-\frac{1}{3}(8+1)+\frac{1}{2}(4-1)+2(2+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{8}\left(-3+\frac{3}{2}+6\right)=\frac{1}{8}\cdot\frac{9}{2}=\frac{9}{16}$$

20. [정답] ④

연이율 2%의 복리일 때, a년 후의 금액은 최초 원금의 $(1.02)^a$배이다.

따라서 $1000000\cdot(1.02)^a=2000000$에서

$1.02^a=2$

양변에 상용로그를 취하면

$a\log 1.02=\log 2$

$$\therefore a=\frac{\log 2}{\log 1.02}=\frac{0.3010}{0.0086}=35$$