

2020 해경 3차 수학 해설 (유원지)

1. [정답] ③

[해설] $\log 30 = 1 + \log 3$ 이므로 $n = 1$, $\alpha = \log 3$ 이다.

$$\text{따라서 } 2^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{1}{\alpha}} = 2^1 + 3^{\frac{1}{\log 3}} = 2 + 3^{\log_3 10} = 2 + 10 = 12$$

2. [정답] ④

[해설] 삼각형의 세 내각의 크기의 합 $A + B + C = 180^\circ = \pi$ 이므로
 $B + C = \pi - A$

$$\therefore \cos(B + C) = \cos(\pi - A) = -\cos A = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CA} \times \sin A \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 16\sqrt{2} \end{aligned}$$

3. [정답] ③

[해설] 주어진 조건으로부터

$$\sum_{k=1}^{2020} k a_{k+1} = a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \dots + 2019a_{2020} + 2020a_{2021} = 26 \cdots \textcircled{1},$$

$$\sum_{k=1}^{2020} (k+1)a_k = 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + \dots + 2020a_{2019} + 2021a_{2020} = 47 \cdots \textcircled{2}$$

② - ① 하면

$$2(a_1 + a_2 + \dots + a_{2020}) - 2020a_{2021} = 21$$

$$\text{그런데 } a_{2021} = \frac{1}{2020} \text{이므로 } 2021a_{2020} = 1$$

$$\text{즉 } 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{2020}) = 22$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{2020} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_{2020} = 11$$

4. [정답] ②

[해설] $f(x)$ 는 $|x| > 1$ 일 때 $\frac{1}{x}$, $|x| < 1$ 일 때 $3x+5$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = (3 \times 1 + 5) + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$$

5. [정답] ①

[해설] $f(x)$ 가 모든 실수에서 미분가능하므로, 모든 실수에서 연속이기도 하다.

$$\text{따라서 } f(1) = g(1) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1 + 7 - 2 = 6,$$

$$f(-1) = g(-1) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 1 - 7 + 6 = 0$$

$$\text{또한 } f'(x) = \begin{cases} 2x+7 & (x < -1) \\ g'(x) & (-1 \leq x \leq 1) \\ 2x+7 & (x > 1) \end{cases} \text{에서}$$

$$f'(1) = g'(1) = \lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = 9, \quad f'(-1) = g'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1-} f'(x) = 5$$

$f(x)$ 는 삼차 다항함수이므로 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 로 잡으면

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \text{이고,}$$

$$f(1) = a + b + c + d = 6, \quad f(-1) = -a + b - c + d = 0,$$

$$f'(1) = 3a + 2b + c = 9, \quad f'(-1) = 3a - 2b + c = 5$$

네 식을 연립하여 풀면

$$a = 2, \quad b = 1, \quad c = 1, \quad d = 2$$

$$\therefore f(x) = 2x^3 + x^2 + x + 2$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 = 3$$

6. [정답] ①

[해설] $f(-x) = f(x)$ 이므로 $f(x)$ 는 우함수이다.

따라서 $xf(x)$ 는 기함수이므로

$$\begin{aligned}\int_{-3}^3 (x-1)f(x)dx &= \int_{-3}^3 xf(x)dx - \int_{-3}^3 f(x)dx \\ &= -2 \int_0^3 f(x)dx = (-2) \times (-3) = 6\end{aligned}$$

7. [정답] ②

[해설] 전체 학생 수를 A 라 하면, 다음과 같이 도식화할 수 있다.

	걸어서 등교	버스로 등교	합계
지각한 학생	$A \times \frac{a}{100} \times \frac{1}{40}$	$A \times \frac{100-a}{100} \times \frac{1}{20}$	
지각하지 않은 학생			
합계	$A \times \frac{a}{100}$	$A \times \frac{100-a}{100}$	A

지각한 학생 중 버스로 등교한 학생 비율이 $\frac{16}{33}$ 이므로,

$$\frac{A \times \frac{100-a}{100} \times \frac{1}{20}}{A \times \frac{a}{100} \times \frac{1}{40} + A \times \frac{100-a}{100} \times \frac{1}{20}} = \frac{16}{33}$$

좌변의 분모, 분자에 $\frac{4000}{A}$ 를 곱하여 정리하면

$$\frac{200-2a}{200-a} = \frac{16}{33} \quad \therefore a = 68$$

8. [정답] ②

[해설] $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-2h)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h} \times (-2)$$

$$= f'(1) + 2f'(1) = 3f'(1) = 9$$

$$\therefore f'(1) = 3$$

이 때, $g'(x) = 2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x)$ 이므로
 $g'(1) = 2f(1) + 2f'(1) = -8 + 6 = -2$

9. [정답] ③

[해설] $y = -x^2 + 3x$ 와 $y = -2x$ 를 연립하면
 $-x^2 + 3x = -2x$ 에서 $x^2 - 5x = 0 \quad \therefore x = 0, 5$
 즉 두 그래프의 교점의 x 좌표가 0, 5이므로
 두 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^5 (-x^2 + 5x) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 \right]_0^5 = -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} = \frac{125}{6}$$

직선 $x = a$ 가 이 넓이를 이등분하므로

$$\int_0^a (-x^2 + 5x) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 \right]_0^a = -\frac{1}{3}a^3 + \frac{5}{2}a^2 = \frac{125}{12} \text{ 이어야 한다.}$$

양변에 12를 곱하여 정리하면

$$4a^3 - 30a^2 + 125 = 0$$

$$(2a - 5)(2a^2 - 10a - 25) = 0$$

$$\therefore a = \frac{5}{2}, \frac{5 \pm 5\sqrt{3}}{2}$$

그런데 $0 < a < 5$ 이므로

$$a = \frac{5}{2}$$

10. [정답] ①

[해설] 근과 제수의 관계에 의해 $\alpha + \beta = -2$, $\alpha\beta = -2$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-2)^2 - 2 \times (-2) = 8$$

$$\therefore (k - \alpha^2)(k - \beta^2) = k^2 - k(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha\beta)^2 = k^2 - 8k + 4$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} (k - \alpha^2)(k - \beta^2) = \sum_{k=1}^{10} (k^2 - 8k + 4)$$

$$= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 8 \times \frac{10 \times 11}{2} + 40$$

$$= 385 - 440 + 40 = -15$$

11. [정답] ①

[해설] $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$ 이므로,

주어진 식은 $(2i)^n = -2^n i$

$$2^n i^n = -2^n i = 2^n \times (-i)$$

$$\therefore i^n = -i$$

이를 만족하는 자연수 n 은 $n = 4k - 1$ (k 는 자연수)의 형태이므로,
20 이하의 자연수 중 이를 만족하는 것은 3, 7, 11, 15, 19의 5개다.

12. [정답] ②

[해설] $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & (x \geq 1) \\ x+1 & (x < 1) \end{cases}$ 이고,

$f^{-1}(1) = k$ 라 하면 $f(k) = 1$ 이므로 k 를 범위를 나눠서 생각하면

(i) $k \geq 1$ 인 경우

$$f(k) = 3k - 1 = 1 \quad \therefore k = \frac{2}{3}$$

이는 $k \geq 1$ 이라는 가정에 모순이다.

(ii) $k < 1$ 인 경우

$$f(k) = k + 1 = 1 \quad \therefore k = 0$$

13. [정답] ③

[해설] 원 $x^2 + y^2 = 20$ 위에서의 점 $(4, 2)$ 에서의 접선의 방정식은 $4x + 2y = 20$

점 P, Q 는 각각 직선 $4x + 2y = 20$ 의 x 절편, y 절편이므로
 $y = 0, x = 0$ 을 대입해 보면
 $P(5, 0), Q(10, 0)$

$$\therefore \triangle OPQ = \frac{1}{2} \times 5 \times 10 = 25$$

14. [정답] ③

[해설] a_2 와 a_3 은 같은 수이므로,

실질적으로 크기를 결정해야 하는 것은 4개 숫자다.

또한 부등호에 모두 등호가 들어가 있으므로 중복조합을 사용한다.

즉, 주사위를 던져서 나올 수 있는 수 6개 중

중복을 허락하여 4개를 선택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_6H_4 = {}_9C_4 = 126$$

15. [정답] ④

[해설] 확률의 총합은 1이므로

$$\int_0^1 ax(1-x)dx = a \int_0^1 (-x^2 + x)dx = a \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{6}a = 1$$

$$\therefore a = 6$$

$$\therefore P(0 \leq X \leq \frac{3}{4}) = \int_0^{\frac{3}{4}} 6x(1-x)dx$$

$$= \left[-2x^3 + 3x^2 \right]_0^{\frac{3}{4}} = -\frac{27}{32} + \frac{27}{16} = \frac{27}{32}$$

16. [정답] ②

[해설] $f = g$ 이면 $x^3 + 1 = 3x - 1$ 로부터

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)^2(x+2) = 0 \quad \therefore x = -2, 1$$

따라서 정의역 X 는 -2 와 1 만을 원소로 가지면 되므로
집합 X 는 $\{-2\}$, $\{1\}$, $\{-2, 1\}$ 의 3개다.

17. [정답] ①

[해설] 좌변을 x 에 대하여 내림차순으로 정렬하면

$$x^2 - (2y-4)x + 2y^2 - 6y + 5 = 0$$

x 는 실수이므로, 위의 x 에 대한 이차방정식은 실근을 갖는다.

$$\text{따라서 판별식 } \frac{D}{4} = (y-2)^2 - (2y^2 - 6y + 5) \geq 0$$

$$y^2 - 2y + 1 \leq 0 \quad \therefore y = 1 (\because y \text{는 실수})$$

이를 위의 x 에 대하여 정리한 방정식에 대입하면

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \therefore x = -1$$

$$\therefore x - y = -2$$

18. [정답] ④

그래프로부터 $f(b) = a$, $f(c) = b$, $f(d) = c$, $f(e) = d$ 이고,

역함수의 정의에 의해 $f^{-1}(a) = b$, $f^{-1}(b) = c$, $f^{-1}(c) = d$, $f^{-1}(d) = e$

이를 바탕으로 선택지를 분석하면

① $(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(b) = (f^{-1} \circ f^{-1})(c) = f^{-1}(d) = e$

② $(f \circ f)(d) = f(c) = b$

③ $f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(b))) = f^{-1}(f^{-1}(c)) = f^{-1}(d) = e$ 로 양변이 서로 같음

④ $(f \circ f)(e) = f(d) = c$, $(f^{-1} \circ f^{-1})(b) = f^{-1}(c) = d$ 로 양변이 다름

19. [정답] ①

$$\begin{aligned} x^3 - ax^2 + bx - 6 &= (x-1)(x-2)(x+c) \\ &= (x^2 - 3x + 2)(x+c) = x^3 + (c-3)x^2 + (2-3c)x + 2c \end{aligned}$$

양변의 계수를 비교하면

$$-a = c-3, \quad b = 2-3c, \quad -6 = 2c$$

$$\therefore a = 6, \quad b = 11, \quad c = -3$$

$$\therefore 2a + 3b - 5c = 12 + 33 + 15 = 60$$

20. [정답] ③

㉠ $x^2 = 1$ 의 양변에 x 를 곱하면, 등식의 성질에 의하여 $x^3 = x$ (참)

㉡ $x^2 - 6x + 8 \leq 0$ 이면 $(x-2)(x-4) \leq 0$ 이므로 $2 \leq x \leq 4$

한편 $x^2 - x > 0$ 에서 $x(x-1) > 0$ 이므로 $x > 1, x < 0$

$2 \leq x \leq 4$ 의 범위는 $x > 1, x < 0$ 의 범위에 포함되므로 참이다.

㉢ $x^2 - 1 \leq 0$ 이면 $(x-1)(x+1) \leq 0$ 이므로 $-1 \leq x \leq 1$

한편 $x^2 - 3x \leq 0$ 에서 $x(x-3) \leq 0$ 이므로 $0 \leq x \leq 3$

$-1 \leq x \leq 1$ 의 범위는 $0 \leq x \leq 3$ 의 범위에 포함되지 않는 부분이 있으므로 거짓

㉤ $2x - 1 = 3$ 에서 $x = 2$ 이고,

이를 $x^2 - 4x + 4 = 0$ 에 대입하면 성립하므로 참

따라서 참인 것은 ㉠, ㉡, ㉤의 3개