2020년 서울시 7급 자동제어 A책형 해설

01. ①	02. ②	03. ④	04. ③	05. ③	06. ④	07. ②	08. ③	09. ③	10. ②
11. ③	12. ②	13. ①	14. ④	15. ①	16. ④	17. ①	18. ③	19. ①	20. ②

1. 【정답】 ①

$F(s)=\dfrac{3e^{-3s}}{s^2+2s+10}=\dfrac{3}{(s+1)^2+3^2}e^{-3s}$이므로 역변환하면

$f(t)=e^{-(t-3)}\sin(3(t-3))u_s(t-3)=e^{-(t-3)}\sin(3t-9)u_s(t-3)$

2. 【정답】 ②

루프이득은 $2\cdot(-1)=-2$, $3\cdot(-2)=-6$, $2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot\dfrac{1}{3}\cdot 5\cdot 12\cdot\dfrac{1}{15}=4$,

$12\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-3$의 네 개이다.

동시에 두 개를 취한 비접촉 루프 이득은 -2와 -6, -2와 -3, -6과 -3의 세 개다.
동시에 세 개를 취한 비접촉 루프 이득은 -2와 -6과 -3의 한 개이다.

$R(s)$에서 $C(s)$까지 순방향경로는 $4\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot\dfrac{1}{3}=4$의 한 개이고 순방향경로와 비접촉인 루프이득은 -3이므로

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{4(1-(-3))}{1-(-2-6+4-3)+(12+6+18)-(-36)}=\frac{16}{1+7+36+36}=\frac{16}{80}=\frac{1}{5}$$

3. 【정답】 ④

루프이득은 $\dfrac{1}{s}\cdot(-\alpha)=-\dfrac{\alpha}{s}$, $\dfrac{1}{s}\cdot(-\gamma)=-\dfrac{\gamma}{s}$, $\dfrac{1}{s}\cdot\beta\cdot\dfrac{1}{s}\cdot(-\beta)=-\dfrac{\beta^2}{s^2}$의 세 개이다.

동시에 두 개를 취한 비접촉 루프 이득은 $-\dfrac{\alpha}{s}$와 $=-\dfrac{\gamma}{s}$이다.

따라서 특성방정식 $1-\left(-\dfrac{\alpha}{s}-\dfrac{\gamma}{s}-\dfrac{\beta^2}{s^2}\right)+\dfrac{\alpha\gamma}{s^2}=0$, $s^2+(\alpha+\gamma)s+(\alpha\gamma+\beta^2)=0$

4. 【정답】 ③

$G(j\omega)=\dfrac{K}{j\omega(2j\omega+1)(j\omega+2)}=\dfrac{K}{j\omega(2-2\omega^2+5j\omega)}$

$2-2\omega^2=0$에서 $\omega_p=1\,[\mathrm{rad/sec}]$

$G(j\omega_p)=\dfrac{K}{j\omega\cdot 5j\omega}=-\dfrac{K}{5}$, 이득여유 $\dfrac{1}{|G(j\omega_p)|}=\dfrac{5}{K}=2.0$이므로 $K=2.5$

5. 【정답】 ③

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),\ \ y(t) = [1\ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

제어시스템 식 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$에서 상태관측기 식을 빼면

$$\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = A\left(x(t) - \hat{x}(t)\right) - L\left(y(t) - C\hat{x}(t)\right)$$

여기서 $y(t) = Cx(t)$이므로 대입하여 간단히 하면

$$\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\left(x(t) - \hat{x}(t)\right)$$

추정오차 $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$이므로 추정오차로 나타내면

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t)$$

따라서 특성방정식은 $\det(sI - (A - LC)) = 0$이다.

$$\det(sI - (A - LC)) = 0$$

$$A - LC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} [1\ 0] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 & 0 \\ l_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 & 1 \\ -2-l_2 & -1 \end{bmatrix}$$

따라서 특성방정식 $\det(sI - (A - LC)) = s^2 + (l_1 + 1)s + l_1 + l_2 + 2 = 0$

고유값 $s = -5 \pm 4j$로부터 $s^2 + 10s + 41 = 0$

$l_1 + 1 = 10,\ l_1 + l_2 + 2 = 41$

$l_1 = 9,\ l_2 = 30$이므로 $L = \begin{bmatrix} 9 \\ 30 \end{bmatrix}$

6. 【정답】 ④

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{s \to 0} \frac{K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)(s^2 + 4s)}{s^3 + 2s^2 + 5s + 10}} = \frac{1}{1 + \lim_{s \to 0} \frac{K_p\left(s + \frac{1}{T_i}\right)(s + 4)}{s^3 + 2s^2 + 5s + 10}} = \frac{1}{1 + \frac{4K_p}{10T_i}}$$

$$= \frac{5T_i}{5T_i + 2K_p}$$

7. 【정답】 ②

ㄱ. 모든 극점이 복소평면 좌반면에 존재하면 시스템의 출력은 수렴한다.

ㄴ. 극점의 허수부가 실수축으로부터 멀수록 진동 주파수는 높아진다.

ㄷ. 극점의 실수부의 절댓값 크기가 클수록 출력 신호의 수렴 또는 발산 속도가 빨라진다.

ㄹ. 영점의 부호와 크기는 시스템의 출력에 영향을 미친다.

영점이 좌반평면에 있으면서 허수축과 가까워질수록 출력신호의 오버슈트는 커진다.

영점이 우반평면에 있으면서 허수축과 가까워질수록 출력신호의 언더슈트는 커진다.

ㅁ. 복소평면 좌반면에 허수축과 가까운 영점이 있으면 상향 초과(over shoot)를 발생시킨다.

8. **【정답】** ③

특성방정식 $2s^4+2s^3+7s^2+3s+K=0$

순허수근을 $s=j\omega$라 하면

$2(j\omega)^4+2(j\omega)^3+7(j\omega)^2+3j\omega+K=0$

$2\omega^4-2j\omega^3-7\omega^2+3j\omega+K=0,\ 2\omega^4-7\omega^2+K+j\omega\left(-2\omega^2+3\right)=0$

$-2\omega^2+3=0,\ \omega=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

9. **【정답】** ③

Routh-Hurwitz 판별법을 쓰면

s^5	1	2	1
s^4	1	2	1
s^3	$0\rightarrow 4$	$0\rightarrow 4$	
s^2	1	1	
s^1	$0\rightarrow \varepsilon$		
s^0	1		

s^3행이 모두 0이 되므로 보조방정식 $A(s)=s^4+2s^2+1=0,\ \dfrac{dA(s)}{ds}=4s^3+4s=0$으로부터 4와 4로 대체한다.

첫 번째 열에서 0이 나오므로 아주 작은 양수 ε으로 대체하여 계산한다.

부호변화의 횟수가 0번이므로 보조방정식 $A(s)=s^4+2s^2+1=0$은 우반평면에 근을 갖지 않는다. 짝수 다항식의 근은 원점에 대칭이므로 근은 모두 허수축 위에 2개씩 중첩하여 존재한다. 그리고 s^4행까지는 부호변화가 없으므로 원래 다항식의 나머지 극점 하나는 좌반평면에 존재한다. 따라서 특성방정식은 좌반평면에 1개, 허수축에 4개의 근이 존재하므로 불안정하다.

다른 풀이

특성 방정식 $s^5+s^4+2s^3+2s^2+s+1=0,\ s=-1$이 방정식의 근이 되므로 조립제법을 써서 인수분해하면 $(s+1)\left(s^4+2s^2+1\right)=(s+1)\left(s^2+1\right)^2=0$

근은 $-1,\ j,\ j,\ -j,\ -j$의 다섯 개이므로 특성방정식은 좌반평면에 1개, 허수축에 4개의 근이 2개씩 중첩하여 존재한다. 따라서 불안정하다.

10. **【정답】** ②

① 문제에서 감쇠비 $0<\zeta<1$의 부속감쇠이므로 단위 계단 입력에 대한 출력은 감쇠하면서 진동한다.

② $t=0$에서 첫 번째 최대 초과(maximum overshoot)까지 도달하는 시간이 최대 첨두

시간 $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$이므로 ζ가 1에 가까울수록 커진다.

③ 정착시간 t_s는 $\zeta\omega_n$에 반비례한다.

(1% 정착시간 $t_s = \dfrac{4.6}{\zeta\omega_n}$, 2% 정착시간 $t_s = \dfrac{4}{\zeta\omega_n}$, 5% 정착시간 $t_s = \dfrac{3}{\zeta\omega_n}$)

④ 최대 초과(maximum overshoot)는 $e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$이다.

11. **【정답】** ③

주파수의 영향이 적은 $\omega < 10^{-2}$에서 $\angle G(j\omega) = -180^\circ$이므로 음의 실수 값을 갖는다. 따라서 $\omega < 10^{-2}$양의 실수 값을 갖는 ①번과 ②번은 정답이 될 수 없다.
주파수의 영향이 큰 $\omega = 10\,[\mathrm{rad/sec}]$에서 $-20 < 20\log|G(j\omega)| < -30$이므로

$10^{-1} < |G(j\omega)| < 10^{-\frac{3}{2}}$이다. 따라서 $|G(j\omega)| = \left|\dfrac{10}{10 \cdot j10}\right| = \dfrac{1}{10} = 10^{-1}$인 ④번은 정답이 될 수 없다. 따라서 시스템의 전달함수로 가장 적당한 것은 ③번 $\dfrac{5}{10s-2}$이다.

12. **【정답】** ②

$$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+(\zeta\omega_n)^2+\omega_n^2-(\zeta\omega_n)^2} = \frac{\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n)^2+\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(s+\zeta\omega_n)^2+\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2}$$

역변환하면 $\dfrac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)$

13. **【정답】** ①

페루프 전달함수 $T(s) = \dfrac{\dfrac{K}{s(s+a)}}{1+\dfrac{K}{s(s+a)}} = \dfrac{K}{s^2+as+K}$

파라미터 a의 변화에 대한 페루프 전달함수의 감도(sensitivity)

$$S_a^T = \frac{a}{T}\frac{\partial T}{\partial a} = \frac{a}{\dfrac{K}{s^2+as+K}} \cdot \frac{-Ks}{(s^2+as+K)^2} = \frac{-as}{s^2+as+K}$$

14. 【정답】 ④

$\dfrac{K}{as+1}$의 개루프 전달함수(4사분면 상의 반원)에서 $\omega=0$에서의 위상이 -90°만큼, $\omega=\infty$에서의 위상이 $(-90^\circ)\times 2=-180^\circ$만큼 변화하였으므로 $\omega=0$에서와 $\omega=\infty$에서의 위상을 -90°만큼 변화시키는 $s\neq 0$인 극 1개와 $\omega=\infty$에서의 위상을 -90°만큼 변화시키는 $s=0$인 극이 1개 추가된 형태이다.

따라서 전달함수의 형태로 가장 적절한 것은 ④번 $\dfrac{K}{s(as+1)(bs+1)}$이다.

15. 【정답】 ①

$G(j0)=\dfrac{b}{a}=-2$이므로 $b=-2a$

$$G(j\omega)=\frac{b}{j\omega+a}=\frac{-2a(a-j\omega)}{(a+j\omega)(a-j\omega)}=\frac{-2a(a-j\omega)}{a^2+\omega^2}=\frac{-2a^2}{a^2+\omega^2}+j\frac{2a\omega}{a^2+\omega^2}$$

$\omega=0$에서 $\omega=\infty$까지 허수부가 음수인 3사분면상의 반원을 따라 움직이므로

허수부 $\dfrac{2a\omega}{a^2+\omega^2}<0$, $a<0$이다.

따라서 $b=-2a$이면서 $a<0$을 만족하는 경우는 ①번뿐이다.

16. 【정답】 ④

① 개루프 전달함수의 영점이 없으므로 $K=\infty$일 때 근궤적은 모두 무한대로 발산한다.

② 점근선의 각도 $\theta_a=\dfrac{(2k+1)}{4-0}\times 180^\circ$, $k=0, 1, 2, 3$이므로

$\theta_a=45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$ 따라서 점근서의 개수는 4개이며, 점근선은 실수축과 각각 45°, 135°, 225°, 그리고 315°로 만난다.

③ 극점 $s=-3$에서의 출발각 : $-\theta_{s=-3}-180^\circ-180^\circ-0^\circ=180^\circ$,

$\theta_{s=-3}=-540^\circ=180^\circ$

극점 $s=0$에서의 출발각 : $-\theta_{s=0}-0^\circ-0^\circ-0^\circ=180^\circ$,

$\theta_{s=0}=-180^\circ=180^\circ$

극점 $s=-3$과 $s=0$에서의 출발 각도는 180°이다.

④ 특성방정식 $s(s+1)(s+3)(s+4)+K=0$, $s^4+8s^3+19s^2+12s+K=0$

Routh-Hurwitz 판별법을 쓰면

s^4	1	19	K
s^3	8	12	
s^2	$\dfrac{8\cdot 19-1\cdot 12}{8}=\dfrac{35}{2}$	K	
s^1	$\dfrac{\frac{35}{2}\cdot 12-8K}{\frac{35}{2}}=\dfrac{420-16K}{35}$		
s^0	K		

임계 안정도를 가질 때 $420-16K=0$이므로 $K=\dfrac{105}{4}=26.25$이며, 이 값보다 커지면 이 시스템은 불안정해 진다.

17. 【정답】 ①

복소극점 $-1+j1$에서 근궤적의 출발각을 θ라 하면

영점 -2에서 바라본 각도 : 45°

극점 $-1-j1$에서 바라본 각도 : 90°

극점 -3에서 바라본 각도 : $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\tan^{-1}(0.5)=27^\circ$

$45^\circ-(\theta+90^\circ+27^\circ)=180^\circ$, $\theta=-252^\circ=108^\circ$

18. 【정답】 ③

$$\left.\frac{dx_1}{dt}\right|_{(1,\,1)}=1+2+3=6,\ \left.\frac{dx_2}{dt}\right|_{(1,\,1)}=1-3=-2$$

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1}=2x_1+2x_2,\ \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2}=2x_1+6x_2,\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2}=2x_2-3$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1-\left.\dfrac{dx_1}{dt}\right|_{(1,\,1)} \\ \dot{x}_2-\left.\dfrac{dx_2}{dt}\right|_{(1,\,1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1}\right|_{(1,\,1)} & \left.\dfrac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2}\right|_{(1,\,1)} \\ \left.\dfrac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1}\right|_{(1,\,1)} & \left.\dfrac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2}\right|_{(1,\,1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{x_1}-x_1(1) \\ \overline{x_2}-x_2(1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1-6 \\ \dot{x}_1+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{x_1}-1 \\ \overline{x_2}-1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1-6=4\left(\overline{x_1}-1\right)+8\left(\overline{x_2}-1\right)=4\overline{x_1}+8\overline{x_2}-12,\ \dot{x}_1=4\overline{x_1}+8\overline{x_2}-6$$

$$\dot{x}_2+2=-\overline{x_2}+1,\ \dot{x}_2=-\overline{x_2}-1$$

$$\frac{dx_1}{dt} = 4x_1 + 8x_2 - 6,\ \ \frac{dx_2}{dt} = -x_2 - 1$$

19. **【정답】** ①

(가)

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \ CA = (1\ 0)\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-2\ 1)$$

가제어성 행렬 : $S = (B\ AB) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \det S = 0$

(가)는 가제어 하지 않다.

(나)

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix},\ \ CA = (1\ 0)\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-2\ 0)$$

가관측성 행렬 : $V = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},\ \det V = 0$

(나)는 가관측 하지 않다.

따라서 (가)는 가제어 하지 않으며 (나)는 가관측 하지 않다.

20. **【정답】** ②

계수행렬 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -4 \end{bmatrix}$의 고윳값의 대각표준형으로 변환된 계수행렬($\overline{A}$)의 대각선 성분 이므로

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 6 & -1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \ -\lambda(\lambda(4+\lambda)+1) - 1 \cdot (-6) = 0$$

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 6 = 0,\ \ (\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda+3) = 0$$

$\lambda = 1,\ -2,\ -3$이므로 계수행렬 $\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$이다.