

2018년 서울시 9급 경력경쟁임용 수학 A책형 해설

01. ③ 02. ① 03. ② 04. ④ 05. ④ 06. ① 07. ① 08. ④ 09. ③ 10. ①
 11. ② 12. ③ 13. ② 14. ④ 15. ③ 16. ③ 17. ① 18. ① 19. ③ 20. ③

1. 【정답】 ③

$$P(14 \leq X \leq 38) = P\left(\frac{14-30}{8} \leq Z \leq \frac{38-30}{8}\right) = P(-2 \leq Z \leq 1) \\ = 0.4772 + 0.3413 = 0.8185$$

2. 【정답】 ①

$$k^2 + \frac{2}{3}k + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$3k^2 + 2k + 2 = 3, \quad 3k^2 + 2k - 1 = 0$$

$$(3k-1)(k+1) = 0, \quad k > 0 \text{ 이므로 } k = \frac{1}{3}$$

확률분포표를 다시 나타내면

X^2	0	1	4	합계
$P(X^2=x)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$	1

$$E(X^2) = 1 \times \frac{4}{9} + 4 \times \frac{1}{3} = \frac{16}{9}$$

3. 【정답】 ②

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + \cdots + (n+n)^2}{2n^3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2 \right] \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^2 = \frac{1}{6} (2^3 - 1^3) = \frac{7}{6}$$

4. 【정답】 ④

$$\alpha^2 + \beta^2 = (2\cos\theta + 1)^2 - 2(-\sin^2\theta) = 4\cos^2\theta + 4\cos\theta + 1 + 2\sin^2\theta$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2\cos^2\theta + 4\cos\theta + 3 = 2(\cos\theta + 1)^2 + 1$$

$-1 \leq \cos\theta \leq 1$ 이므로 최댓값은 $\cos\theta = 1$ 일 때 9, 최솟값은 $\cos\theta = -1$ 일 때 1이다.

$$9 \cdot 1 = 9$$

5. 【정답】 ④

$$f(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\{f(x)\}^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(f(x)-2)(f(x)+2)} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2+2} = \frac{1}{28}$$

6. 【정답】 ①

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax^2 - x - a}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(x + a)}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(x + a)(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2})} = (1 + a) \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax^2 - x - a}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}} = (-1 + a) \cdot 2\sqrt{2} = 0$$

$$b = 0$$

$$a + b = 1 + 0 = 1$$

7. 【정답】 ①

$$\sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right) = \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n} \right) = \sum_{n=1}^{10} \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$\sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{21} + \frac{1}{23} = \frac{1}{3} - \frac{1}{23} = \frac{20}{69}$$

8. 【정답】 ④

$$\log_y x + \log_x y = \log_x y + \frac{1}{\log_x y} = \frac{10}{3}$$

$$(\log_x y)^2 - \frac{10}{3} \log_x y + 1 = 0, \quad 3(\log_x y)^2 - 10 \log_x y + 3 = 0$$

$$(3 \log_x y - 1)(\log_x y - 3) = 0, \quad \log_x y = \frac{1}{3}, \quad \log_x y = 3$$

따라서 $x^{\frac{1}{3}} = y$ 또는 $x^3 = y$ 이므로 $xy = 81$ 로부터

$x = 27, y = 3$ 또는 $x = 3, y = 27$ 이다.

$$\frac{x+y}{2} = \frac{27+3}{2} = 15$$

9. 【정답】 ③

직선 $y = \sqrt{3}x - 3$ 이 원 $(x - \sqrt{3})^2 + y^2 \leq 3$ 의 중심을 지나므로

세 부등식이 나타내는 영역의 넓이는 반지름이 $\sqrt{3}$ 이고 중심각의 크기가 60° 인 부채꼴의 넓이와 같다.

$$3\pi \times \frac{60}{360} = \frac{\pi}{2}$$

10. 【정답】 ①

$y = \frac{3}{x} + 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면

$$y - b = \frac{3}{x - a} + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 + b = 3, \quad b = 2$$

$$0 = \frac{3}{4 - a} + 1, \quad a = 7$$

$$a + b = 7 + 2 = 9$$

11. 【정답】 ②

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} = \frac{100(2a_1 + 99d)}{2} = 50(2a_1 + 99d) = 140$$

$$\begin{aligned} a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100} &= \frac{50(2a_2 + 49 \cdot 2d)}{2} = \frac{50(2a_2 + 98d)}{2} = \frac{50(2a_1 + 100d)}{2} \\ &= \frac{50(2a_1 + 99d) + 50d}{2} = \frac{140 + 50}{2} = 95 \end{aligned}$$

12. 【정답】 ③

$$\int_a^x f(t)dt = x^3 + 3x^2 \text{의 양변을 미분하면 } f(x) = 3x^2 + 6x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(2x) - f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(3 \cdot (2x)^2 + 6 \cdot 2x) - (3x^2 + 6x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{21x^2 + 18x}{x} = 18$$

13. 【정답】 ②

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 3, \quad \sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 35$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (3a_k - 2)^2 &= 9 \sum_{k=1}^{10} a_k^2 - 12 \sum_{k=1}^{10} a_k + 40 = 9 \cdot 35 - 12 \cdot 3 + 40 \\ &= 315 - 36 + 40 = 319 \end{aligned}$$

14. 【정답】 ④

$a = \sqrt{5+2\sqrt{6}}$, $b = \sqrt{5-2\sqrt{6}}$ 이라 하면 두 정육면체의 부피의 합은 $a^3 + b^3$ 이다.

$$a = \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}, \quad b = \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$a+b=2\sqrt{3}, \quad ab=3-2=1$$

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=(2\sqrt{3})^3-3 \cdot 2\sqrt{3}$$

$$a^3+b^3=24\sqrt{3}-6\sqrt{3}=18\sqrt{3}$$

15. 【정답】 ③

A점의 좌표를 (k, k^2+1) 이라 하면 B점의 좌표는 (k^2+2, k^2+1) 이다.

이때 선분 AB의 길이는 k^2+2-k 이므로

$$f(k)=k^2-k+2=\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$$

따라서 선분 AB의 길이의 최솟값은 $\frac{7}{4}$ 이다.

16. 【정답】 ③

$y \geq 1$ 일 때

$$y \leq -x+3, \quad y \leq x+1$$

$y < 1$ 일 때

$$y \geq x-1, \quad y \geq -x+1$$

$$y+\frac{1}{2}x=k \text{로 놓으면 } y=-\frac{1}{2}x+k$$

최대일 때는 $(1, 2)$ 를 지날 때이고, 최소일 때는 $(1, 0)$ 을 지날 때이다.

$$M=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}, \quad m=\frac{1}{2}$$

$$M+m=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$$

17. 【정답】 ①

$$\frac{d}{dx}[(x^3-1)f(x)]=2x-3 \text{이므로}$$

$$(x^3-1)f(x)=x^2-3x+C$$

$$0=1-3+C, \quad C=2$$

$$x \neq 1 \text{일 때 } f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x-2}{x^2+x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(x-2)(x^2+x+1)} = \frac{1}{2^2+2+1} = \frac{1}{7}$$

18. 【정답】 ①

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \right) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n+1} - 1) \left(\frac{1}{4} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \left(\frac{1}{2} \right)^n - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$C > A > B$$

19. 【정답】 ③

$$\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x} = x$$

$$\sqrt{(\sqrt{x} + \sqrt{1})^2} = x$$

$$\sqrt{x} + 1 = x$$

$$\sqrt{x} = x - 1$$

$$x = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0, \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\sqrt{x} = x - 1 > 0 \text{ 이므로 } x > 1 \text{ 인 } x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ 가 근이 된다.}$$

20. 【정답】 ③

$${}_4\text{H}_5 \times {}_2\text{H}_2 = {}_8\text{C}_5 \times {}_3\text{C}_2 = 56 \times 3 = 168$$