

정답					
1 ~ 6	1	4	1	3	2
6 ~ 10	4	4	1	4	4
11 ~ 15	2	1	2	3	2
16 ~ 20	3	3	2	2	4

※ 일부 계산과정은 생략하였습니다.

1. 주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로 양 변에

$x = 0$ 을 대입하면 $4 = 2b$, $x = 1$ 을 대입하면 $6 + a = -c$, $x = 2$ 를 대입하면 $12 + 2a = 2$ 이므로 $a = -5$, $b = 2$, $c = -1$ 이다. 따라서 $abc = 10$ 이다.

2. $2021 = x$ 라 하면 주어진 문제는 $x^4 - 1$ 을 $(x - 1) \times x^2 + (x - 1)$ 로 나누었을 때의 몫을 구하는 문제이다.

$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ 이고,
 $(x - 1) \times x^2 + (x - 1) = (x - 1)(x^2 + 1)$ 이므로
 $\cancel{(x - 1)}(x + 1)\cancel{(x^2 + 1)} \div \cancel{(x - 1)}\cancel{(x^2 + 1)} = x + 1 = 2022$ 이다.

3. α 가 이차방정식 $x^2 - 6x + 1$ 의 근이므로 $\alpha^2 - 6\alpha + 1 = 0$ 이다.

$\alpha \neq 0$ 이므로 양변을 α^2 으로 나누면 $1 - \frac{6}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = 0$ 이며,
양변에 $\frac{4}{\alpha}$ 를 더하면 $1 - \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = \frac{4}{\alpha}$ 이고, β 또한 마찬가지로 $1 - \frac{2}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{4}{\beta}$ 임을 알 수 있다.

한편 근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha + \beta = 6$, $\alpha\beta = 1$ 이 성립한다.

따라서 준식 $= \sqrt{\frac{4}{\alpha}} + \sqrt{\frac{4}{\beta}} = \frac{2(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{2\sqrt{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}}}{\sqrt{\alpha\beta}} = 4\sqrt{2}$ 이다.

다른 풀이) $\sqrt{1 - \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2} + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)^2} = \left|1 - \frac{1}{\alpha}\right| + \left|1 - \frac{1}{\beta}\right|$ 이며,

근의 공식에 의해 $x^2 - 6x + 1$ 의 근은 $3 \pm 2\sqrt{2}$ 이므로 $\alpha = 3 + 2\sqrt{2}$, $\beta = 3 - 2\sqrt{2}$ 로 놓아도 무방하다.

α, β 를 위 식에 대입하고, 유리화하여 정리하면

준식 $= |2\sqrt{2} - 2| + |-2\sqrt{2} - 2| = (2\sqrt{2} - 2) - (-2\sqrt{2} - 2) = 4\sqrt{2}$ 이다.

4. $y = xf(x)$ 의 한 근은 0이며, x 축과 만나는 점의 개수(= 방정식 $xf(x)$ 의 실근의 개수)가 2 이상이 되려면

1) f 가 두 개의 실근을 가지거나, 2) f 가 0이 아닌 중근을 가져야 한다.

이때 2)에서는, f 의 두 근의 합이 2라 하였으므로 f 는 절대 0을 중근으로 가질 수 없다.

한편 이차방정식 f 의 최고차항의 계수는 근의 개수에 영향을 주지 않으므로 $f(x) = x^2 - 2x + k$ 로 놓아도 충분하다.

그러므로 1)과 2)에 의해 $D = 1 - k \geq 0$ 이어야 하고, 따라서 실수 k 의 최댓값은 1이다.

5. $2\overline{AP} = a\overline{PB}$ 이고, 점 P 가 선분 위에 있으므로 $\Rightarrow$ 점 P 는 선분 AB 를 $a : 2$ 로 내분하는 점임을 알 수 있다.

내분점을 구하는 공식에 의해 $\left(\frac{3a+2a}{a+2}, \frac{4a+2b}{a+2}\right) = (1, 0)$ 이며

이를 계산하면 $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ 이고 따라서 $ab = -\frac{1}{2}$ 이다.

6. 직선 $x - y - 3 = 0$ 과 원점 사이의 거리는 $d = \frac{3}{\sqrt{2}}$ 이고,

d 를 구하려는 삼각형의 높이라 하면 $\Rightarrow$ 삼각형의 밑변의 길이는 원 $x^2 + y^2 = 25$ 와 직선 $x - y - 3 = 0$ 의 두 교점 사이의 거리이다.

밑변의 길이를 l 이라 하면 피타고라스 정리에 의해 $\frac{1}{2}l = \sqrt{25 - \frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{2}}$ 이다.

따라서 구하려는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}dl = d \times \left(\frac{1}{2}l\right) = \frac{3\sqrt{41}}{2}$ 이다.

7. $f(x-1, y+1) = 0$ 에서 $x \rightarrow x+3$, $y \rightarrow y-3$ 을 대입하면 $f(x+2, y-2) = 0$ 이므로

방정식 $f(x+2, y-2) = 0$ 이 나타내는 도형은 $\Rightarrow$ 방정식 $f(x-1, y+1) = 0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 도형임을 알 수 있다.

따라서 주어진 원의 중심은 위의 평행이동에 의해 $(0, 7)$ 로 이동되므로

점 $(0, 7)$ 과 직선 $x - y + 3 = 0$ 사이의 거리는 $\frac{|0 - 7 + 3|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ 이다

8. $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프는 제4사분면을 지나고 우하향하는 곡선이며,

함수 $g = -\sqrt{x} + k$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 y 축 방향으로 k 만큼 평행이동한 곡선이므로 y 축을 기준으로 오른쪽 (좌표평면에서 $x \geq 0$ 인 부분)을 지나는 곡선이다. 따라서 y 축의 오른쪽 부분만을 생각해도 충분하다.

한편 f 의 그래프에서 y 축의 오른쪽 부분은 $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ 에서 시작하여 점근선인 $y = 2$ 까지 우상향하는 곡선이므로

k 가 최솟값이 될 때는 함수 g 의 그래프가 점 $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ 을 지날 때이다. 따라서 실수 k 의 최솟값은 $-\frac{1}{3}$ 이다.

9. 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha_n + \beta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\alpha_n \beta_n = \frac{1}{2(n+1)}$ 이고,

$$\alpha_n^2 + \beta_n^2 = (\alpha_n + \beta_n)^2 - 2\alpha_n \beta_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{이므로}$$

$$\text{준식} = \sum_{n=1}^{2021} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{2022} = \frac{2021}{2022} \text{이다.}$$

10. 주어진 점화식 $na_{n+1} = 2(n+1)a_n$ 에

$$n=1 \text{을 대입하면 } a_2 = 2 \times 2 \times a_1 = 4,$$

$$n=2 \text{을 대입하면 } 2a_3 = 2 \times 3 \times a_2 \Rightarrow a_3 = 12,$$

$$n=3 \text{을 대입하면 } 3a_4 = 2 \times 4 \times a_3 \Rightarrow a_4 = 32,$$

$$n=4 \text{을 대입하면 } 4a_5 = 2 \times 5 \times a_4 \Rightarrow a_5 = 80 \text{이다.}$$

따라서 $S_5 = 1 + 4 + 12 + 32 + 80$ 이고, 이를 10으로 나눈 나머지는 S_5 의 일의 자릿수이므로 9이다.

참고)

$$(n-1)a_n = 2na_{n-1}$$

$$(n-2)a_{n-1} = 2(n-1)a_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$1 \cdot a_2 = 2 \cdot 2 \cdot a_1$$

에서 좌우변 각각의 항을 모두 곱하면 일반항은 $a_n = 2^{n-1} \cdot n$ 임을 알 수 있다.

11. $2^x = 100^z$ 에서 $2 = 100^{\frac{z}{x}}$ 이고,

$5^y = 100^z$ 에서 $5 = 100^{\frac{z}{y}}$ 이므로

위의 두 식을 변끼리 곱하면 $10 = 100^{\frac{z}{x} + \frac{z}{y}}$ 이다. $10 = 100^{\frac{1}{2}}$ 이므로 $\frac{z}{x} + \frac{z}{y} = \frac{1}{2}$ 이다.

12. $|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & (x \geq 2) \\ -(x - 2) & (x < 2) \end{cases}$ 이므로 $f(x) = \begin{cases} x + 3 & (x \geq 2) \\ -(x + 3) & (x < 2) \end{cases}$ 임을 알 수 있다.

따라서 $a = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = (x + 3)|_{x=2} = 5$, $b = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -(x + 3)|_{x=2} = -5$ 이므로 $ab = -25$ 이다.

13. $\left. \frac{d}{dx}(x^2 - 9)f(x) \right|_{x=3} = 2xf(x) + (x^2 - 9)f'(x)|_{x=3} = 6f(3) = 30$ 이다.

14. 함수 f 가 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x + a}{x - 3} = b$ 이 성립해야 한다.

분모 $\rightarrow 0$ 이므로 분자도 $\rightarrow 0$ 이어야 하고 따라서 $x^2 - x + a|_{x=3} = 6 + a = 0$, 즉 $a = -6$ 이다.

$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$ 이므로 $b = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 2) = 5$ 이다. 따라서 $a + b = -1$ 이다.

참고) 로피탈의 정리를 이용하면 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x + a}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5 = b$ 임을 바로 알 수 있다.

15. 곡선 $y = x^2 - 2x + 3$ 위의 임의의 점에서 $y = 4x - 7$ 까지의 거리 중에서

최단거리는 $\Rightarrow$ 기울기 4인 직선이 곡선 $y = x^2 - 2x + 3$ 에 접할 때, 그 접점과 $y = 4x - 7$ 까지의 거리이다.

기울기 4인 직선을 $y = 4x + k$ 라 놓고 $y = x^2 - 2x + 3$ 과 연립하면

$x^2 - 6x + 3 - k = 0$ 이고, 이때 $D = 0$ 이어야 하므로 $k = -6$ 이며, 그때의 x 값은 3이다.

즉 접점의 x 좌표가 3이므로 접점의 y 좌표는 $4x - 6|_{x=3} = 6$ 이다.

따라서 최단거리는 접점 (3, 6)과 직선 $y = 4x - 7$ 과의 거리이므로 $d = \frac{1}{\sqrt{17}}$ 이다.

다른 풀이) 곡선 $y = x^2 - 2x + 3$ 위의 임의의 점을 $(t, t^2 - 2t + 3)$ 이라 하면

직선 $y = 4x - 7$ 과의 거리는 $\frac{|-t^2 + 6t - 10|}{\sqrt{17}}$ 이고,

모든 실수 t 에 대해 $-t^2 + 6t - 10 < 0$ 이며, $-t^2 + 6t - 10$ 은 $t = 3$ 일 때 최댓값 1을 가지므로

$|-t^2 + 6t - 10|$ 은 $t = 3$ 일 때 최솟값 1을 갖는다.

16. 미적분학의 기본정리에 의해 $f'(x) = 3x^2 - 6ax + b$ 이고,

(삼차)함수 f 가 극값을 갖지 않으므로 도함수 f' 는 실근을 갖지 않거나 중근을 가져야 한다.

즉 $D = 9a^2 - 3b \leq 0 \Rightarrow b \geq 3a^2$ 이다.

한편 $f(1) = \int_0^1 (3t^2 - 6at + b) dt = t^3 - 3at^2 + bt \Big|_0^1 = 1 - 3a + b$ 이고,

$b \geq 3a^2$ 의 양변에 $1 - 3a$ 를 더하면 $f(1) = 1 - 3a + b \geq 1 - 3a + 3a^2$ 이다.

$3a^2 - 3a + 1$ 은 $\frac{d}{da}(3a^2 - 3a + 1) = 6a - 3 = 0$, 즉 $a = \frac{1}{2}$ 일때 최솟값을 가지므로

$3a^2 - 3a + 1$ 의 최솟값은 $3a^2 - 3a + 1 \Big|_{a=\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$ 이다.

이를 종합하면 모든 실수 a 에 대해 $f(1) \geq 1 - 3a + 3a^2 \geq \frac{1}{4}$ 이므로 $f(1)$ 의 최솟값은 $\frac{1}{4}$ 이다.

17. $x \rightarrow \frac{n+2k}{n}$ 라 놓자.

$k = 0$ 을 대입하면 $x \rightarrow 1$ 이고, $k = n$ 을 대입하면 $x \rightarrow 3$ 이므로 적분구간은 $1 \leq x \leq 3$ 이다.

이때 적분구간의 길이가 2이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n+2k}{n} \right)^2 = \int_1^3 x^2 dx$ 이며, 따라서 준식 $= 3 \int_1^2 x^2 dx = x^3 \Big|_1^3 = 26$ 이다.

18. 시각 t 에서 수직선 상의 물체의 위치를 $s(t)$ 라 하면

$s'(t) = v(t) = 3(t-2)(t-4)$ 이므로 주어진 물체는 $t : 1 \sim 2$ 에서 오른쪽으로, $t : 2 \sim 3$ 에서 왼쪽으로 이동한다.

그러면 구하려는 값은 $(t = 1$ 에서 $t = 2$ 까지 오른쪽으로 이동한 거리) + $(t = 2$ 에서 $t = 3$ 까지 왼쪽으로 이동한 거리)이다.

물체의 이동거리는 초기값(시작점)에 영향을 받지 않으므로 $s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$ 라 하면,

$s(1) = 16, s(2) = 20, s(3) = 18$ 이므로 구하려는 값은 $|s(1) - s(2)| + |s(2) - s(3)| = 6$ 이다.

다른 풀이) $\int_1^3 |v(t)| dt = \int_1^2 |3t^2 - 18t + 24| dt = \int_1^2 3t^2 - 18t + 24 dt + \int_2^3 -(3t^2 - 18t + 24) dt = 6$

19. 적어도 한 사람이 명중시킬 확률은 $1 - (\text{모두 못맞출 확률})$ 이므로 구하려는 확률은 $1 - \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{17}{20}$ 이다.

20. 주어진 문제의 조건에 의해 $P(A) = 3P(A^c)$ 이고, $P(A^c) = 1 - P(A)$ 이므로 $P(A) = \frac{3}{4}$ 이다.

따라서 5회의 독립시행에서 사건 A 가 2회 일어날 확률은 ${}_5C_2 \left(\frac{3}{4} \right)^2 \left(\frac{1}{4} \right)^3 = \frac{45}{512}$ 이다.