

수학 ‘나’형 정답

1	②	2	③	3	①	4	④	5	④
6	⑤	7	②	8	⑤	9	④	10	③
11	④	12	⑤	13	①	14	②	15	⑤
16	③	17	①	18	③	19	①	20	②
21	⑤	22	9	23	15	24	24	25	257
26	10	27	84	28	160	29	135	30	80

해 설

1. [출제의도] 로그의 값을 계산한다.

$$\log_2 \sqrt{8} = \log_2 (2^3)^{\frac{1}{2}} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_2 2 = \frac{3}{2}$$

2. [출제의도] 중복순열과 중복조합의 값을 계산한다.

$${}_4\Pi_2 = 4^2 = 16, {}_4H_2 = {}_{4+2-1}C_2 = {}_5C_2 = 10 \text{ 이므로}$$

$${}_4\Pi_2 + {}_4H_2 = 16 + 10 = 26$$

3. [출제의도] 조건부확률을 이용하여 확률을 구한다.

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{5}$$

4. [출제의도] 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구한다.

미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) \text{ 이므로 } f'(2) = 3$$

따라서

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2) + f(2) - f(2-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{-h}$$

$$= f'(2) + f'(2)$$

$$= 2f'(2)$$

$$= 6$$

5. [출제의도] 등차수열의 공차를 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_3 = a_1 + 2d, a_4 = a_2 + 2d, a_5 = a_3 + 2d \text{ 이므로}$$

$$a_3 + a_4 + a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + 6d$$

$$\text{즉, } 6d = (a_3 + a_4 + a_5) - (a_1 + a_2 + a_3) = 39 - 15 = 24$$

$$\text{따라서 } d = 4$$

6. [출제의도] 이항정리를 이용하여 식의 값을 구한다.

$${}_4C_0 + {}_4C_1 \times 3 + {}_4C_2 \times 3^2 + {}_4C_3 \times 3^3 + {}_4C_4 \times 3^4$$

$$= (1+3)^4 = 4^4 = 256$$

7. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 교점의 좌표를 구한다.

두 함수의 그래프가 만나는 점의 y 좌표가

$$\text{같으므로 } \sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \text{ 이므로 } 2\sin x = 1$$

$$\text{즉, } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\text{그러므로 } x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

따라서 모든 점의 x 좌표의 합은 π

8. [출제의도] 함수의 그래프에서 좌극한과 우극한을 구한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 4, \lim_{x \rightarrow 0-} (x-1) = -1 \text{ 에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) - \frac{\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 0-} (x-1)}$$

$$= 2 - \left(\frac{4}{-1}\right) = 6$$

9. [출제의도] 여사건의 확률을 이용하여 독립시행의 확률을 구한다.

한 개의 동전을 6번 던져서 앞면이 2번 이상 나오는 사건을 A 라 하면 A^c 은 앞면이 0번 또는 1번 나오는 사건이므로 그 확률은

$$P(A^c) = {}_6C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{7}{64}$$

$$\text{따라서 } P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{7}{64} = \frac{57}{64}$$

10. [출제의도] 정적분을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

곡선 $y = x^2$ 과 직선 $y = ax$ 의 교점의 좌표는 방정식 $x^2 = ax$ 에서 $(0, 0), (a, a^2)$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^a |ax - x^2| dx = \left[\frac{a}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{6}$$

11. [출제의도] 미분을 이용하여 속도와 가속도에 대한 문제를 해결한다.

시각 t 에서의 속도를 v 라 하면

$$x = t^3 + kt^2 + kt \text{ 에서 } v = 3t^2 + 2kt + k$$

$t = 1$ 에서 점 P 가 운동 방향을 바꾸므로 $t = 1$ 에서 $v = 0$

$$\text{그러므로 } 3 + 2k + k = 0 \text{ 에서 } k = -1$$

시각 t 에서의 가속도를 a 라 하면

$$a = 6t + 2k = 6t - 2$$

$$\text{따라서 } t = 2 \text{에서 점 } P \text{의 가속도는 } 6 \times 2 - 2 = 10$$

12. [출제의도] 표본평균의 확률분포를 이용하여 확률을 구한다.

정규분포 $N(104, 4^2)$ 을 따르는 모집단에서 임의추출한 과자 4상자의 무게의 표본평균을 $\overline{X}$ 라 하면 $\overline{X}$

는 정규분포 $N\left(104, \frac{4^2}{4}\right)$ 즉, $N(104, 2^2)$ 을 따른다.

$$\text{그러므로 확률변수 } Z = \frac{\overline{X} - 104}{2} \text{ 는 표준정규분포}$$

$N(0, 1^2)$ 을 따른다.

$$P(a \leq \overline{X} \leq 106) = P\left(\frac{a-104}{2} \leq Z \leq 1\right)$$

$$P(-0.5 \leq Z \leq 1) = 0.5328 \text{ 이므로 } \frac{a-104}{2} = -0.5$$

$$\text{따라서 } a = 103$$

13. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결한다.

점 A 의 좌표는 $(t, 3^{2-t} + 8)$, 점 B 의 좌표는 $(t, 0)$, 점 C 의 좌표는 $(t+1, 0)$, 점 D 의 좌표는

$$(t+1, 3^t)$$

사각형 $ABCD$ 가 직사각형이므로

점 A 의 y 좌표와 점 D 의 y 좌표가 같아야 한다.

$$\text{즉, } 3^{2-t} + 8 = 3^t$$

$$(3^t)^2 - 8 \times 3^t - 9 = 0, (3^t + 1)(3^t - 9) = 0$$

$$\text{그런데 } 3^t > 0 \text{ 이므로 } 3^t = 9 \text{ 에서 } t = 2$$

그러므로 직사각형 $ABCD$ 의 가로의 길이는 1이고 세로의 길이는 $3^2 = 9$

따라서 직사각형 $ABCD$ 의 넓이는 9

14. [출제의도] 절댓값을 포함한 등차수열의 합을 이용하여 항의 값을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d ($d > 0$)이라 하면

$$a_5 = 5 \text{ 이므로 } a_3 = 5 - 2d, a_4 = 5 - d, a_6 = 5 + d$$

$$a_7 = 5 + 2d$$

그러므로

$$\sum_{k=3}^7 |2a_k - 10| = |2a_3 - 10| + |2a_4 - 10| + |2a_5 - 10|$$

$$+ |2a_6 - 10| + |2a_7 - 10|$$

$$= |-4d| + |-2d| + 0 + |2d| + |4d|$$

$$= 12d = 20$$

$$\text{따라서 } d = \frac{5}{3} \text{ 이므로 } a_6 = a_5 + d = \frac{20}{3}$$

15. [출제의도] 이산확률변수의 확률분포를 이용하여 평균을 구한다.

$$E(Y) = E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = 1 + 6^2 = 37$$

16. [출제의도] 부정적분과 정적분의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

$$\int_0^1 g(t) dt = a \text{ 라 하면 (가)에서 } f(x) = 2x + 2a$$

$g(x)$ 는 $f(x)$ 의 한 부정적분이므로

$$g(x) = \int f(x) dx = x^2 + 2ax + C \text{ (} C \text{는 적분상수)}$$

$$\text{(나)에서 } C - \int_0^1 (t^2 + 2at + C) dt = \frac{2}{3}$$

$$C - \left(\frac{1}{3} + a + C\right) = \frac{2}{3} \text{ 에서 } a = -1$$

$$\int_0^1 g(t) dt = a \text{ 에서 } \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 + Ct\right]_0^1 = -1$$

$$\text{즉, } C = -\frac{1}{3} \text{ 이므로 } g(x) = x^2 - 2x - \frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } g(1) = 1 - 2 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$$

17. [출제의도] 함수의 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구한다.

$$\text{(가)에서 } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)g(x) + 4\} = 0$$

함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 $x = 1$ 에서 연속이므로

$$f(1)g(1) = -2g(1) = -4 \text{ 에서 } g(1) = 2 \text{ ㉠}$$

$g(x)$ 는 일차함수이므로 $g(x) = ax + b$ 라 하면

$$g'(x) = a \text{ ㉡}$$

$$\text{(나)에서 } g(0) = g'(0) \text{ 이므로 } b = a$$

$$\text{그런데 ㉠에서 } a + b = 2 \text{ 이므로 } a = 1, b = 1$$

$$\text{㉡에서 } g'(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x) + 4}{x-1} \text{ 는 함수 } f(x)g(x) \text{ 의 } x=1 \text{ 에서}$$

의 미분계수이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x) + 4}{x-1} = f'(1)g(1) + f(1)g'(1)$$

$$\text{즉, } f'(1)g(1) + f(1)g'(1) = 2f'(1) - 2 = 8$$

$$\text{따라서 } f'(1) = 5$$

18. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명한다.

집합 A_k 의 원소의 개수는 k 이하의 자연수 중에서 2개를 선택하는 조합의 수와 같으므로

$$\boxed{\text{(가)}} = {}_kC_2 = \frac{k(k-1)}{2}$$

집합 $\{(1, k+1), (2, k+1), \dots, (k, k+1)\}$ 에서

$k+1$ 이 k 개이므로 그 합은 $k(k+1)$

$$\text{즉, } \boxed{\text{(나)}} = k(k+1)$$

$$\text{그러므로 } f(k) = \frac{k(k-1)}{2}, g(k) = k(k+1)$$

$$\text{따라서 } f(10) + g(9) = 45 + 90 = 135$$

19. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 외접원의 반지름의 길이를 구한다.

주어진 원이 삼각형 BCD 의 외접원이고 반지름의 길이가 r 이므로 사인법칙에 의하여

$$\overline{CD} = 2r \sin \theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}r, \overline{BC} = 2r \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}r$$

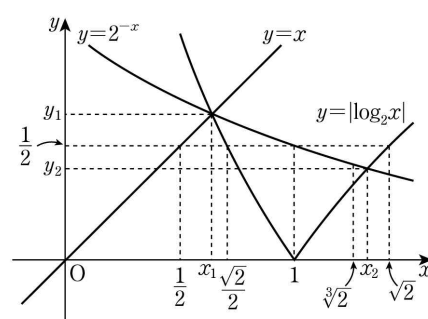
삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여
 $(\sqrt{3}r)^2$
 $= (\sqrt{2})^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2 - 2 \times \sqrt{2} \times \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right) \times \cos \frac{\pi}{3}$
 이 식을 정리하면 $5r^2 + 2\sqrt{6}r - 6 = 0$
 그러므로 $r = \frac{-2\sqrt{6} \pm 6}{5}$
 따라서 $r > 0$ 이므로 $r = \frac{6 - \sqrt{6}}{5}$

20. [출제의도] 정적분과 미분의 관계를 이용하여 정적분의 값을 구한다.

$g'(x) = f(x) - \{f(x) + xf'(x)\} = -xf'(x)$
 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 4이므로 $f'(x)$ 는 이차항의 계수가 12인 이차함수이다.
 그러므로 $g'(x) = -xf'(x)$ 에서 $g'(x)$ 는 최고차항의 계수가 -12인 삼차함수이다.
 또, 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \leq g(3)$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=3$ 에서 최댓값을 가지고 함수 $g(x)$ 는 $x=3$ 에서 극값을 가진다. 즉, $g'(3) = 0$
 그러므로 $f'(3) = 0$ 에서 $g'(x) = -12x(x-3)(x-a)$
 사차함수 $g(x)$ 가 오직 1개의 극값만 가지므로 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극값을 가질 수 없다. 즉, $a=0$
 $g'(x) = -12x^2(x-3) = -12x^3 + 36x^2$
 따라서 $\int_0^1 g'(x) dx = \left[-3x^4 + 12x^3\right]_0^1 = 9$

21. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 두 교점의 관계를 추론한다.

$y = 2^{-x}$, $y = |\log_2 x|$, $y = x$ 의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. $0 < x < 1$ 일 때,
 두 곡선 $y = 2^{-x}$, $y = -\log_2 x$ 의 교점은 직선 $y = x$ 위에 있으므로
 $x_1 = y_1$ 이고 $x_1 < 1$, $y_1 < 1$
 그림에서 $y = 2^{-x}$ 은 감소함수이므로
 $2^{-1} < 2^{-x_1} = y_1$ 즉, $\frac{1}{2} < y_1 = x_1$
 한편, $-\log_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} < y_1 = -\log_2 x_1$ 이고
 $y = -\log_2 x$ 는 감소함수이므로 $x_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$
 그러므로 $\frac{1}{2} < x_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$ (참)
 ㄴ. $2^{-\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{2^{\sqrt[3]{2}}}$ 이고 $\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$

그런데 $8 < 9$ 이므로 $2^{\frac{3}{2}} < 3 \dots\dots \textcircled{1}$
 $\sqrt[3]{2}$ 와 $\frac{3}{2}$ 을 각각 세제곱하면 $(\sqrt[3]{2})^3 < \left(\frac{3}{2}\right)^3$ 이
 므로 $\sqrt[3]{2} < \frac{3}{2}$ 즉, $2^{\sqrt[3]{2}} < 2^{\frac{3}{2}} \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 $2^{\sqrt[3]{2}} < 2^{\frac{3}{2}} < 3$ 이므로
 $\log_2 \sqrt[3]{2} < 2^{-\sqrt[3]{2}}$
 그러므로 $\sqrt[3]{2} < x_2$
 또, $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, $2^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{\sqrt{2}}}$

$\frac{1}{2} > \frac{1}{2^{\sqrt{2}}}$ 이므로 $\log_2 \sqrt{2} > 2^{-\sqrt{2}}$
 그림에서 $x_2 < \sqrt{2}$
 그러므로 $\sqrt[3]{2} < x_2 < \sqrt{2}$ (참)
 ㄷ. $y_1 = x_1$ 이므로 ㄱ에서 $\frac{1}{2} < y_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $y_2 = \log_2 x_2$ 이고 $\sqrt[3]{2} < x_2 < \sqrt{2}$,
 $\log_2 \sqrt[3]{2} < \log_2 x_2 < \log_2 \sqrt{2}$ 이므로
 $\frac{1}{3} < y_2 < \frac{1}{2}$
 그러므로 $y_1 - y_2 < \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3\sqrt{2}-2}{6}$ (참)
 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

22. [출제의도] 정적분의 값을 구한다.

$$\int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 9$$

23. [출제의도] 이항분포의 분산을 이용하여 시행 횟수를 구한다.

$$V(X) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$$

$$V(2X+1) = 2^2 \times V(X) = n$$

따라서 $n = 15$

24. [출제의도] 함수의 연속성을 이용하여 함수값을 구한다.

함수 $h(x) = f(x)g(x)$ 가 구간 $(-2, 2)$ 에서 연속이므로 함수 $h(x)$ 가 $x = -1$ 과 $x = 1$ 에서 연속이다.
 그러므로 이차함수 $g(x)$ 는 $g(-1) = 0$, $g(1) = 0$ 을 만족해야한다.
 이차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로
 $g(x) = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$
 따라서 $g(5) = 5^2 - 1 = 24$

25. [출제의도] 등비수열의 합을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

(i) $x \neq 1$ 일 때

$$f(x) = (1+x^4+x^8+x^{12})(1+x+x^2+x^3)$$

$$= \frac{(x^4)^4 - 1}{x^4 - 1} \times \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \frac{x^{16} - 1}{x - 1}$$

 (ii) $x = 1$ 일 때 $f(1) = 4 \times 4 = 16$
 따라서 $\frac{f(2)}{\{f(1)-1\}\{f(1)+1\}} = \frac{2^{16}-1}{(16-1)(16+1)}$

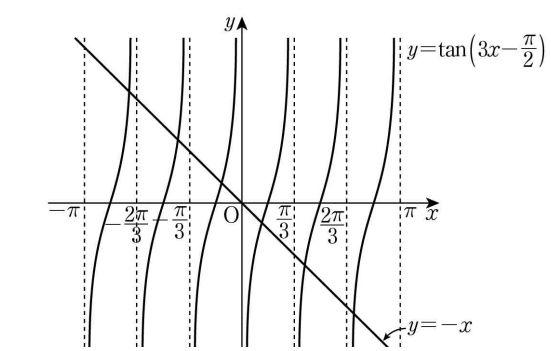
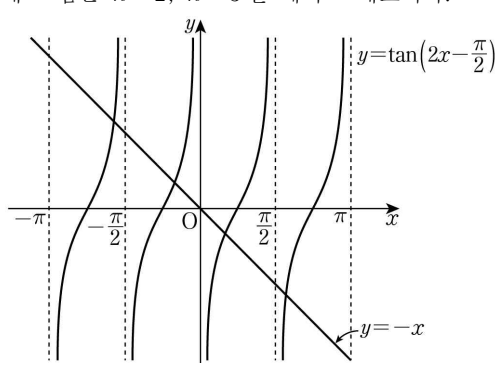
$$= \frac{(2^8-1)(2^8+1)}{(2^4-1)(2^4+1)}$$

$$= 2^8 + 1$$

$$= 257$$

26. [출제의도] 삼각함수의 그래프와 직선의 교점의 개수를 구한다.

$y = \tan\left(nx - \frac{\pi}{2}\right) = \tan n\left(x - \frac{\pi}{2n}\right)$ 의 주기는 $\frac{\pi}{n}$ 이고
 $y = \tan\left(nx - \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 $y = \tan nx$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2n}$ 만큼 평행이동한 그래프이다.
 아래 그림은 $n=2$, $n=3$ 일 때의 그래프이다.



그러므로 직선 $y = -x$ 와
 $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프의 교점의 개수는 $a_2 = 4$,
 $y = \tan\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프의 교점의 개수는 $a_3 = 6$
 따라서 $a_2 + a_3 = 4 + 6 = 10$

27. [출제의도] 중복조합을 이용하여 순서쌍의 개수를 구한다.

(가)를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 ${}_3H_{14} = {}_{16}C_2 = 120$
 (나)에서 $a \neq 2$, $b \neq 2$, $c \neq 2$
 (i) a, b, c 중 1개가 2인 경우
 $a=2$ 일 때, $b+c=12$ 를 만족시키는 b 와 c 의 모든 순서쌍 (b, c) 의 개수는 ${}_2H_{12}$ 이고 $(2, 10)$, $(10, 2)$ 인 경우를 제외하면 ${}_2H_{12} - 2 = 11$
 $b=2$, $c=2$ 인 경우의 수도 각각 11이므로 a, b, c 중 1개가 2인 경우의 수는 $11 \times 3 = 33$
 (ii) a, b, c 중 2개가 2인 경우
 순서쌍 (a, b, c) 를 구하면 $(2, 2, 10)$, $(2, 10, 2)$, $(10, 2, 2)$ 의 세 가지 경우가 있다.
 따라서 구하는 경우의 수는 $120 - (33 + 3) = 84$

28. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 이용하여 방정식에 대한 문제를 해결한다.

$f'(x) = 6x^2 - 6(a+1)x + 6a = 6(x-1)(x-a)$
 이므로 $f'(x) = 0$ 에서 $x = 1$ 또는 $x = a$
 $f(1) = 2 - 3(a+1) + 6a = 3a - 1$,
 $f(a) = 2a^3 - 3a^2(a+1) + 6a^2 = -a^2(a-3)$
 이므로 삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 갖기 위해서는 $f(1)f(a) = -a^2(3a-1)(a-3) < 0$
 $a^2 > 0$ 이므로 $(3a-1)(a-3) > 0$
 그런데 a 는 자연수이므로 $a > 3$
 그러므로 $a_1 = 4$, $a_2 = 5$, $\dots$, $a_n = n + 3$
 $a = a_n$ 일 때, $f(x) = 2x^3 - 3(a_n + 1)x^2 + 6a_n x$ 이고
 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극댓값 $b_n = f(1) = 3a_n - 1$
 따라서 $\sum_{n=1}^{10} (b_n - a_n) = \sum_{n=1}^{10} (2n + 5) = 160$

29. [출제의도] 독립시행의 확률을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

한 번의 시행 결과로 나타나는 경우의 확률은 다음과 같다.
 ① A가 가진 공의 개수가 1개 늘어나는 경우:
 A가 던진 주사위의 눈의 수가 짝수이고 B가 던진 주사위의 눈의 수가 홀수이므로 확률은 $\frac{1}{4}$
 ② A가 가진 공의 개수의 변화가 없는 경우:
 A, B가 던진 주사위의 눈의 수가 모두 짝수이거나 모두 홀수이므로 확률은 $\frac{1}{2}$
 ③ A가 가진 공의 개수가 1개 줄어드는 경우:
 A가 던진 주사위의 눈의 수가 홀수이고 B가 던진 주사위의 눈의 수가 짝수이므로 확률은 $\frac{1}{4}$
 한편, 4번째 시행 후 센 공의 개수가 처음으로 6이 되는 경우는 4번째 시행에서 ①이 일어나고 3번째 시행에서는 ① 또는 ②가 일어나야 한다.

(i) 3 번째 시행에서 ①이 일어나는 경우
 첫 번째, 두 번째 시행에서 ①, ③이 일어나거나
 두 시행 모두 ②가 일어나야 하므로

$$\left\{2! \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$$

(ii) 3 번째 시행에서 ②가 일어나는 경우
 첫 번째, 두 번째 시행에서 ①, ②가 일어나야 하

$$\text{므로 } \left({}_2C_1 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\text{그러므로 구하는 확률은 } \left(\frac{3}{32} + \frac{1}{8}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{7}{128}$$

따라서 $p=128$, $q=7$ 이므로 $p+q=135$

30. [출제의도] 함수의 연속성과 적분의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

$g(x) = \int_0^x (t-1)f(t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분

$$\text{하면 } g'(x) = (x-1)f(x) = \begin{cases} -3x^3 + 3x^2 & (x < 1) \\ 2x^2 - 8x + 6 & (x \geq 1) \end{cases}$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 적분하면

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x^4 + x^3 + C_1 & (x < 1) \\ \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x + C_2 & (x \geq 1) \end{cases}$$

(C_1 , C_2 는 적분상수)

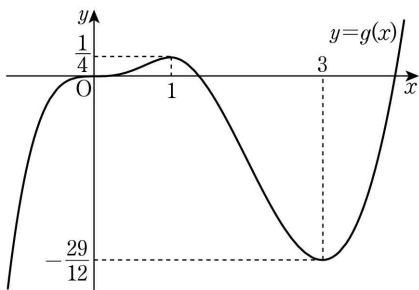
$g'(1)=0$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$g(0)=0 \text{ 에서 } C_1=0 \text{ 이고 } -\frac{3}{4}+1=\frac{2}{3}-4+6+C_2$$

$$\text{에서 } C_2 = -\frac{29}{12}$$

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x^4 + x^3 & (x < 1) \\ \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x - \frac{29}{12} & (x \geq 1) \end{cases}$$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



위의 그래프를 이용하여 함수 $h(t)$ 를 구하면

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \left(t < -\frac{29}{12} \text{ 또는 } t > \frac{1}{4}\right) \\ 2 & \left(t = -\frac{29}{12} \text{ 또는 } t = \frac{1}{4}\right) \\ 3 & \left(-\frac{29}{12} < t < \frac{1}{4}\right) \end{cases}$$

이므로 $\left| \lim_{t \rightarrow a^+} h(t) - \lim_{t \rightarrow a^-} h(t) \right| = 2$ 를 만족시키는 실수

a 의 값은 $\frac{1}{4}$ 과 $-\frac{29}{12}$ 뿐이다.

$$\text{그러므로 } S = \left| \frac{1}{4} \right| + \left| -\frac{29}{12} \right| = \frac{8}{3}$$

$$\text{따라서 } 30S = 30 \times \frac{8}{3} = 80$$

[참고] $g(x) = \int_0^x (t-1)f(t) dt$ 는 다음과 같이 구할 수도 있다.

(i) $x < 1$ 일 때,

$$g(x) = \int_0^x (t-1)(-3t^2) dt = -\frac{3}{4}x^4 + x^3$$

(ii) $x \geq 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^1 (t-1)(-3t^2) dt + \int_1^x 2(t-1)(t-3) dt \\ &= \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x - \frac{29}{12} \end{aligned}$$