

2020년 제2차 경찰공무원(순경) 수학 해설

01. ③	02. ②	03. ④	04. ③	05. ①	06. ①	07. ②	08. ③	09. ④	10. ③
11. ①	12. ②	13. ③	14. ④	15. ①	16. ④	17. ②	18. ②	19. ③	20. ④

1. 【정답】 ③

$$f(-1+b)=0, f(-1-1)=f(-2)=0$$

$$f(-2)=4+2+a=0, a=-6$$

$$f(x)=x^2-x-6=(x-3)(x+2)$$

$$-1+b=3, b=4$$

$$ab=(-6) \cdot 4=-24$$

2. 【정답】 ②

$$\beta^3=1, \beta^2+\beta+1=0 \text{ 이므로 } \beta+1=-\beta^2$$

$$\alpha^2(\beta+1)=\alpha^2 \cdot (-\beta^2)=-\alpha^2\beta^2=-(\alpha\beta)^2$$

$$\alpha\beta=1 \text{ 이므로 } \alpha^2(\beta+1)=-(\alpha\beta)^2=-1$$

3. 【정답】 ④

$$a+b+c=4, \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1, a^2+b^2+c^2=6$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \text{ 의 양변에 } abc \text{ 를 곱하면 } ab+bc+ca=abc$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

$$4^2=6+2abc, abc=5$$

4. 【정답】 ③

$$\overline{AP}:\overline{PB}=2:1, \overline{AQ}:\overline{QB}=2:1$$

$$\overline{AP}=\frac{2}{3}\overline{AB}, \overline{PB}=\frac{1}{3}\overline{AB}, \overline{AQ}=2\overline{AB}, \overline{QB}=\overline{AB}$$

$$\overline{PQ}=\overline{PB}+\overline{BQ}=\frac{1}{3}\overline{AB}+\overline{AB}=\frac{4}{3}\overline{AB}, k=\frac{4}{3}$$

$$3k=4$$

5. 【정답】 ①

$$\text{두 점 A, B 를 지나는 직선의 방정식 } y+1=\frac{1-(-1)}{-1-0}x, y=-2x-1$$

직선 $2x + y + 1 = 0$ 과 점 $P(a, a^2 - 6a + 10)$ 사이의 거리가 최소일 때 삼각형 ABP의 넓이가 최소이므로

$$d = \frac{|2a + a^2 - 6a + 10 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|a^2 - 4a + 11|}{\sqrt{5}} = \frac{|(a-2)^2 + 7|}{\sqrt{5}}$$

따라서 $a = 2$ 일 때 최솟값 $d = \frac{7}{\sqrt{5}}$ 를 가지므로 이때 삼각형 ABP의 넓이는

$$S = \frac{1}{2} \times \sqrt{1^2 + 2^2} \times \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7}{2}$$

6. 【정답】 ①

$$|x^2 - 9| = 4x + 4k$$

$y = |x^2 - 9|$ 과 직선 $y = 4x + 4k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나고 $4k$ 가 최소인 경우는 $(-3, 0)$ 을 지날 때이므로 실수 k 의 최솟값은 $0 = 4 \cdot (-3) + 4k$ 에서 $k = 3$ 이다.

7. 【정답】 ②

점 $(-1, 4)$ 와 점 $(1, 0)$ 에 서로 대칭인 직선의 방정식을 구하면

중점의 좌표 $(0, 2)$ 이고 점 $(-1, 4)$ 와 점 $(1, 0)$ 을 지나는 직선의 기울기

$$\frac{0-4}{1-(-1)} = -2 \text{이므로 대칭인 직선의 방정식의 기울기는 } \frac{1}{2} \text{이다.}$$

따라서 대칭인 직선의 방정식 $y - 2 = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{2}x + 2$

점 $(1, 1)$ 과 겹치는 점의 좌표를 (a, b) 라 하면 중점 $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$ 가 대칭인 직선을

지나고 점 $(1, 1)$ 과 점 (a, b) 을 지나는 직선의 기울기 $\frac{b-1}{a-1} = -2$ 이므로

$$\frac{a+1}{4} + 2 = \frac{b+1}{2}, \quad a+1+8=2b+2, \quad a-2b=-7$$

$$\frac{b-1}{a-1} = -2, \quad 2a+b=3$$

연립하면 $a = -\frac{1}{5}$, $b = \frac{17}{5}$ 이므로 점 $(1, 1)$ 과 겹치는 점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{5}, \frac{17}{5}\right)$ 이다.

8. 【정답】 ③

$$y = \frac{3(x-1) - k^2 + 2k + 8}{x-1} = \frac{-k^2 + 2k + 8}{x-1} + 3$$

모든 사분면을 지나려면 $-k^2 + 2k + 8 > 0$ 이어야 하므로

$$k^2 - 2k - 8 < 0, \quad (k-4)(k+2) < 0$$

$-2 < k < 4$, 자연수 k 의 개수는 1, 2, 3의 3개다.

9. 【정답】 ④

$$\sum_{k=1}^{10} \log_3(9a_k) = \sum_{k=1}^{10} (\log_3 a_k + 2) = \sum_{k=1}^{10} \log_3 a_k + 20 = 11, \quad \sum_{k=1}^{10} \log_3 a_k = -9$$

$$\sum_{k=1}^9 \left(\log_{\frac{1}{9}} a_k - 3 \right) = \sum_{k=1}^9 \left(-\frac{1}{2} \log_3 a_k \right) - 27 = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^9 \log_3 a_k - 27 = 2, \quad \sum_{k=1}^9 \log_3 a_k = -58$$

$$\log_3 a_{10} = \sum_{k=1}^{10} \log_3 a_k - \sum_{k=1}^9 \log_3 a_k = -9 - (-58) = 49$$

10. 【정답】 ③

$$S_n = \frac{n(-10 + 3 \cdot (n-1))}{2} = \frac{n(3n-13)}{2}$$

$a_1 - a_2 = -3, a_3 - a_4 = -3, a_5 - a_6 = -3, \dots, a_{2n-1} - a_{2n} = -3$ 이므로

$T_n = (-3) \cdot n = -3n$ 이다.

$$S_n + T_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{13}{2}n - 3n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{19}{2}n = \frac{3}{2}n \left(n - \frac{19}{3} \right)$$

따라서 $S_6 + T_6 < 0, S_7 + T_7 > 0$ 이므로 $\sum_{k=1}^n (S_k + T_k)$ 가 최소가 되게 하는 n 의 값은 6이다.

11. 【정답】 ①

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2} = 5 \text{에서 } f(2) = 1, f'(2) = 5 \text{이다.}$$

$$g'(x) = \{f(x)\}^2 + 2xf(x)f'(x)$$

$$g'(2) = \{f(2)\}^2 + 4f(2)f'(2) = 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 5 = 21$$

12. 【정답】 ②

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2 + a = 1 \text{에서 } a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2^2 + 2 + 1 = b \text{에서 } b = 7$$

$$h(-5) = \frac{f(-5)}{g(-5)} = \frac{-7}{7} = -1, \quad h(3) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{1}{13}$$

$$h(-5) + 26h(3) = -1 + \frac{26}{13} = -1 + 2 = 1$$

13. 【정답】 ③

$$f(1) \times f(2) \times \cdots \times f(10) = 3^{\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)}}$$

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$$

$$f(1) \times f(2) \times \cdots \times f(10) = 3^{\frac{10}{11}} = 9^{\frac{5}{11}}$$

14. 【정답】 ④

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - f(2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 2f(1)}{x - 1} = 2f'(1) = 8$$

$$f(1) = a + 1 = 8, \quad a = 7$$

15. 【정답】 ①

$$y' = 3x^2 \text{이므로 접선의 방정식 } y - t^3 = 3t^2(x - t)$$

$$\text{따라서 점 A의 좌표 } \left(\frac{2}{3}t, 0 \right) \text{이므로 } f(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(t - \frac{2}{3}t \right) \cdot t^3 = \frac{t^4}{6}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t^4 + 4} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{t^4}{6}}{t^4 + 4} = \frac{1}{6}$$

16. 【정답】 ④

$$-1 \leq x \leq 1 \text{에서 } 2 \leq x + 3 \leq 4 \text{이고, } -4 \leq x - 3 \leq -2 \text{이므로}$$

$$\int_{-1}^1 \{xf(x+3) + f(x-3)\}dx = \int_{-1}^1 \{x(3(x+3)+1) + a(x-3)+1\}dx$$

$$= \int_{-1}^1 (3x^2 + (a+10)x - 3a + 1)dx = \left[x^3 + \frac{a+10}{2}x^2 + (-3a+1)x \right]_{-1}^1$$

$$= 2 + 2(-3a+1) = -6a + 4 = 0, \quad a = \frac{2}{3}$$

17. 【정답】 ②

$$x = 1 \text{일 때 } \{f(1)\}^2 = 0, \quad f(1) = 0$$

양변을 미분하면

$$xf(x) = 2f(x)f'(x), \quad f'(x) = \frac{x}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + C, \quad f(1) = 0 \text{이므로 } C = -\frac{1}{4}$$

$$f(2) = \frac{2^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

18. 【정답】 ②

$$\int_0^3 v(t) dt = \int_0^3 (t^2 + t + a) dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + at \right]_0^3 = 9 + \frac{9}{2} + 3a = \frac{15}{2}, \quad a = -2$$

$v(t) = t^2 + t - 2 = (t+2)(t-1)$ 이므로 시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (-t^2 - t + 2) dt + \int_1^3 (t^2 + t - 2) dt = \left[-\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t \right]_0^1 + \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 2t \right]_1^3 \\ &= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + \frac{26}{3} + 4 - 4 = \frac{59}{6} \end{aligned}$$

19. 【정답】 ③

$$4! \times 2! = 48 \text{가지}$$

20. 【정답】 ④

$$P(3 \leq X \leq m) = 0.72 - 0.5 = 0.22, \quad P(m \leq X \leq 9) = 0.5 - 0.28 = 0.22 \text{이므로}$$

$$m = \frac{3+9}{2} = 6 \text{이다.}$$

$$P(|X-m| \leq 3) = P(-3+6 \leq X \leq 3+6) = P(3 \leq X \leq 9) = 0.72 - 0.28 = 0.44$$