2020년 국가직 9급 수학 가책형 해설

01. ②	02. ①	03. ②	04. ③	05. ③	06. ①	07. ④	08. ②	09. ③	10. ④
11. ②	12. ②	13. ②	14. ③	15. ③	16. ①	17. ③	18. ④	19. ④	20. ①

1.【정답】②

$x=1+i,\ x-1=i$

$x^2-2x+1=-1,\ x^2-2x+2=0$

따라서 $(x-2)(x^2-2x+2)=0$이 문제의 삼차방정식이 된다.

$x^3-4x^2+6x-4=0$

$a=-4,\ b=6$

$a+b=-4+6=2$

2.【정답】①

$n(A)+n(B)-n(A\cap B)=n(A\cup B)$

$39+27-n(A\cap B)=54,\ n(A\cap B)=12$

$n((A-B)\cup(B-A))=n(A\cup B)-n(A\cap B)=54-12=42$

3.【정답】②

$a_1=a$, 공차를 d라 하면

$a+a+d=2a+d=7$

$a+2d+a+3d=2a+5d=31$

$4d=24,\ d=6$

4.【정답】③

$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(4)=2$

$f^{-1}(1)=3$

$2+3=5$

5.【정답】③

$$3-5\cos^2\theta+\frac{4}{1+5\sin^2\theta}=3-5(1-\sin^2\theta)+\frac{4}{1+5\sin^2\theta}=-2+5\sin^2\theta+\frac{4}{1+5\sin^2\theta}$$

$$=1+5\sin^2\theta+\frac{4}{1+5\sin^2\theta}-3$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $1+5\sin^2\theta>0$이므로 산술-기하평균의 관계에 의해

$1+5\sin^2\theta = \dfrac{4}{1+5\sin^2\theta}$ 일 때 최솟값을 가진다.

$1+5\sin^2\alpha = 2,\ \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

6.【정답】①

$\log_3 x = \dfrac{3}{\log_3 x} + 2,\ \log_3 x = t$로 치환하면

$t^2 - 2t - 3 = 0,\ (t-3)(t+1) = 0$

$\log_3 x = 3,\ \log_3 x = -1$

$x = 27,\ x = \dfrac{1}{3}$

$\alpha + \dfrac{1}{\beta} = 27 + 3 = 30$

7.【정답】④

$\left(\dfrac{1}{4}\right)^x \le 8^{2-x},\ 2^{-2x} \le 2^{6-3x}$

$-2x \le 6 - 3x,\ x \le 6$

$\log_{\sqrt{3}}(7-x) \le \log_3(2x+1),\ 2\log_3(7-x) \le \log_3(2x+1)$

$(7-x)^2 \le 2x+1,\ x^2 - 16x + 48 \le 0$

$(x-4)(x-12) \le 0,\ 4 \le x \le 12$

진수 조건에 의해 $x < 7,\ x > -\dfrac{1}{2}$이므로 최종 범위는 $4 \le x < 7$이다.

따라서 최종해는 $4 \le x \le 6$

정수 x의 합은 $4+5+6 = 15$

8.【정답】②

A가 준비한 선물을 a, B가 준비한 선물을 b, C가 준비한 선물을 c, D가 준비한 선물을 D라 하면 네 명 모두 다른 사람이 준비한 선물을 선택하는 경우의 수는

$(b, a, c, d),\ (b, c, d, a),\ (b, d, a, c)$

$(c, a, d, b),\ (c, d, a, b),\ (c, d, b, a)$

$(d, a, b, c),\ (d, c, a, b),\ (d, c, b, a)$

의 총 9가지이므로 구하는 확률은 $\dfrac{9}{4!} = \dfrac{3}{8}$이다.

9. 【정답】 ③

두 근의 합 $\alpha+\beta=\dfrac{a-3}{a}$, 두 근의 곱 $\alpha\beta=\dfrac{a-2}{a}$

$\alpha\beta-(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{a}$

α, β가 모두 자연수이므로 $\alpha\beta-(\alpha+\beta)$는 정수이므로 $a=1$ 또는 $a=-1$이다.

1) $a=1$인 경우

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-1$이므로 α, β가 모두 자연수라는 조건에 맞지 않는다.

2) $a=-1$인 경우

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=3$이므로 α, β가 모두 자연수라는 조건에 맞는다.

따라서 $\alpha+\beta=4$

10. 【정답】 ④

$f(x)=x^3-(k+1)x^2+2kx-k$라 하면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 써서 인수분해하면

$(x-1)(x^2-kx+k)=0$

따라서 이차방정식 $x^2-kx+k=0$이 5보다 작은 두 실근을 가져야 한다.

판별식 : $D=k^2-4k>0$, $k<0$ 또는 $k>4$

두 근의 합 : $\alpha+\beta=k<10$

두 근의 곱 : $\alpha\beta=k<25$

$f(5)=25-5k+k>0$, $4k<25$

최종범위는 $4<k<\dfrac{25}{4}$이므로 자연수 k의 합은 $5+6=11$

11. 【정답】 ②

$2\left(1-\sin^2 x\right)-3\sin x=0$

$2\sin^2 x+3\sin x-2=0$

$(2\sin x-1)(\sin x+2)=0$

$\sin x=\dfrac{1}{2}$이므로 $0<x<2\pi$에서 모든 근의 합은 $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{5}{6}\pi=\pi$

12. 【정답】 ②

나오는 눈의 합이 6인 경우 : $(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$

나오는 눈의 합이 10인 경우 : $(4, 6)$, $(5, 5)$, $(6, 4)$

따라서 나오는 눈의 합이 6 또는 10일 확률은 $\dfrac{5+3}{36}=\dfrac{2}{9}$

13. **【정답】** ②

$y = \dfrac{k}{x+1} + 2$로 놓으면 $3 = k + 2$, $k = 1$

$y = \dfrac{1}{x+1} + 2 = \dfrac{2x+3}{x+1}$

$a = 1$, $b = 2$, $c = 3$

$a + b + c = 1 + 2 + 3 = 6$

14. **【정답】** ③

$F(x) = 2f(x) + \dfrac{1}{3}x^3$의 양변을 미분하면

$f(x) = 2f'(x) + x^2$

따라서 $f(x)$는 2차식이다.

$f(x) = x^2 + ax + b$로 놓으면 $x^2 + ax + b = 2(2x + a) + x^2 = x^2 + 4x + 2a$

$a = 4$, $b = 2a = 8$

$f(x) = x^2 + 4x + 8$, $f(1) = 1 + 4 + 8 = 13$

15. **【정답】** ③

$\displaystyle\int_1^{33} g(x)dx = 2 \times 33 - \int_0^2 f(x)dx = 66 - \left[x^4 + x\right]_0^2 = 66 - (16 + 2) = 48$

16. **【정답】** ①

$f'(x) = 3x^2 + 12x - 15 = 3(x^2 + 4x - 5) = 3(x + 5)(x - 1)$

따라서 $x = 1$에서 극솟값 $f(1) = 1 + 6 - 15 + 10 = 2$를 갖는다.

$a + b = 1 + 2 = 3$

17. **【정답】** ③

선분 AB를 한 변으로 하는 정삼각형이 원 $x^2 + y^2 = 4$에 내접하므로 원의 중심이 정삼각형의 무게중심이 되므로 원 $x^2 + y^2 = 4$와 직선 $ax + by + 5 = 0$ 사이의 거리가 1이 되어야 한다.

$\dfrac{5}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$, $a^2 + b^2 = 5^2$

따라서 순서쌍은

$(5, 0)$, $(-5, 0)$, $(0, 5)$, $(0, -5)$,

$(3, 4)$, $(3, -4)$, $(-3, 4)$, $(-3, -4)$,

$(4, 3)$, $(4, -3)$, $(-4, 3)$, $(-4, -3)$ 의 12개다.

18. 【정답】 ④

문제의 조건으로부터 $f(x)=x^4-3x^2+ax+b$로 놓을 수 있다.

$f(2)=f(-2)=0$이므로

$16-12+2a+b=0$, $16-12-2a+b=0$

$a=0$, $b=-4$

$f(x)=x^4-3x^2-4=(x^2-4)(x^2+1)$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}(x^2+1)=5$, $k=5$

19. 【정답】 ④

$P(X^2-3X+2\le 0)=P((X-1)(X-2)\le 0)=P(1\le X\le 2)$

$\frac{1}{6}+a+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$, $a=\frac{1}{3}$

$P(1\le X\le 2)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

20. 【정답】 ①

$\sqrt{3^2+3-3}+3a=0$, $a=-1$

$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+x-3}-x}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x^2+x-3}-x)(\sqrt{x^2+x-3}+x)}{(x-3)(\sqrt{x^2+x-3}+x)}$

$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x^2+x-3}+x}=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{6}$

$a+b=-1+\frac{1}{6}=-\frac{5}{6}$