1번 ②

실계수 이차방정식의 한 근이 $1+i$이므로 다른 근은 $1-i$이다. 다른 한 근을 α라 하면 근과 계수와의 관계에 의하여 세 근의 곱은 4이다.

$$(1+i)(1-i)\times\alpha=4 \qquad \therefore\ \alpha=2$$

따라서 방정식은 다음과 같다.

$$\{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}(x-2)=0$$

위 방정식을 전개하면,

$$(x^2-2x+2)(x-2)=0$$

$$x^3-4x^2+6x-4=0$$

$a=-4,\ b=6$이므로

$\therefore\ a+b=2$

2번 ①

$$\begin{aligned} n(A\cap B)&=n(A)+n(B)-n(A\cup B)\\ &=39+27-54\\ &=12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n((A-B)\cup(B-A))&=n((A\cup B)-(A\cap B))\\ &=54-12\\ &=42 \end{aligned}$$

3번 ②

두 등식을 변끼리 빼면,

$$(a_3-a_1)+(a_4-a_2)=31-7$$

$$4d=24$$

$\therefore\ d=6$

4번 ③

$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(4)=2$

$f^{-1}(1)=3$

$\therefore\ 5$

5번 ③

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$이므로 준식에 대입하면,

$$3-5(1-\sin^2\theta)+\frac{4}{1+5\sin^2\theta}$$

$$=\ -2+5\sin^2\theta+\frac{4}{1+5\sin^2\theta}$$

$$=\ -3+1+5\sin^2\theta+\frac{4}{1+5\sin^2\theta}$$

$1+5\sin^2\theta>0$이므로 산술-기하 평균의 관계에 의하여,

$$1+5\sin^2\theta+\frac{4}{1+5\sin^2\theta}\geq 2\sqrt{4}=4$$

이 때 $1+5\sin^2\theta=\dfrac{4}{1+5\sin^2\theta}$일 때 최솟값을 갖는다.

$$1+5\sin^2\theta=2$$

$\therefore\ \sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

6번 ①

$\log_3 x=t$라 하면,

$$t=\frac{3}{t}+2$$

$$t^2-2t-3=0$$

$$t=-1,\ 3$$

$\log_3 x=-1,\ 3$이므로 $x=\dfrac{1}{3},\ 27$

$\therefore\ \alpha+\dfrac{1}{\beta}=27+3=30$

7번 ④

주어진 부등식을 정리하면,

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x\leq 8^{2-x},\qquad 2^{-2x}\leq 2^{6-3x}$$

$$-2x\leq 6-3x$$

$\therefore\ x\leq 6$

$$\log_{\sqrt{3}}(7-x)\leq\log_3(2x+1)$$

$$\log_3(7-x)^2\leq\log_3(2x+1)$$

$$(7-x)^2\leq 2x+1$$

$$x^2-16x+48\leq 0$$

$\therefore\ 4\leq x\leq 12$

두 부등식을 모두 만족시키는 근은 $4\leq x\leq 6$이므로

$\therefore$ 모든 x의 합은 15

8번 ②

4명이 자신의 것이 아닌 선물을 갖는 경우의 수는 9가지

$\therefore\ \dfrac{9}{4!}=\dfrac{3}{8}$

9번 ③

근과 계수와의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\frac{a-3}{a},\ \alpha\beta=\frac{a-2}{a}$$

두 식을 각각 a에 관하여 정리한 후 a를 소거한다.

$$\alpha\beta=1-\frac{2}{a},\qquad \alpha\beta-1=-\frac{2}{a}\qquad ㉠$$

$$\alpha+\beta=1-\frac{3}{a},\quad \alpha+\beta-1=-\frac{3}{a}$$

$$\frac{2}{3}(\alpha+\beta-1)=-\frac{2}{a}\qquad ㉡$$

㉠, ㉡에 의해

$$\alpha\beta-1=\frac{2}{3}(\alpha+\beta-1)$$

$$\alpha\beta-\frac{2}{3}\alpha-\frac{2}{3}\beta=\frac{1}{3}$$

$$(\alpha-\frac{2}{3})(\beta-\frac{2}{3})=\frac{7}{9}$$

$$(3\alpha-2)(3\beta-2)=7$$

$3\alpha-2=1,\ 3\beta-2=7$ 이므로

$\alpha=1,\ \beta=3$

$\therefore\ \alpha+\beta=4$

10번 ④

k에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해한다.

$$(-x^2+2x-1)k+(x^3-x^2)=0$$

$$-(x-1)^2k+x^2(x-1)=0$$

$$(x-1)(x^2-(x-1)k)=0$$

따라서 $x^2-kx+k=0$이 5보다 작은 두 근을 가진다.

$f(x)=x^2-kx+k$라 하면 다음의 조건을 만족해야 한다.

판별식>0, 축<5, $f(5)$>0

$$D=k^2-4k>0,\ \frac{k}{2}<5,\ 5^2-5k+k>0$$

세 조건을 모두 만족시키는 범위는 $4<k<\frac{25}{4}$

$\therefore$ 모든 자연수 k의 값의 합은 $5+6=11$

11번 ②

$\cos^2x=1-\sin^2x$이므로 대입하면,

$$2(1-\sin^2x)-3\sin x=0$$

$$2\sin^2x+3\sin x-2=0$$

$$(2\sin x-1)(\sin x+2)=0$$

따라서 $\sin x=\frac{1}{2}$이므로 $x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}$

$\therefore$ 모든 근의 합 = π

12번 ②

합이 6인 경우 : 5가지

합이 10인 경우 : 3가지

$\therefore\ \frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

13번 ②

점근선이 $x=-1,\ y=2$이므로 $a=1,\ b=2$

함수 $f(x)=\frac{2x+c}{x+1}$이 $(0,\ 3)$을 지나므로 $c=3$

$\therefore\ a+b+c=6$

14번 ③

주어진 식의 양 변을 미분하면,

$$F'(x)=f(x)=2f'(x)+x^2$$

$f(x)$는 이차함수이므로 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$$ax^2+bx+c=4ax+2b+x^2$$

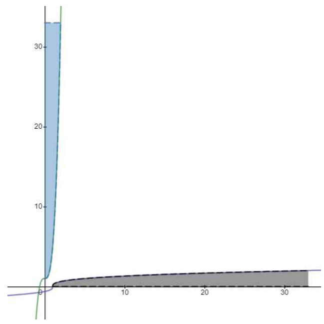
따라서 $a=1,\ b=4,\ c=8$

$\therefore\ f(1)=a+b+c=13$

15번 ③

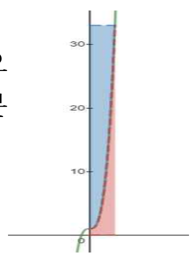
$f(0)=1,\ f(2)=33$이므로 $g(1)=0,\ g(33)=2$

두 그래프의 개형은 다음과 같다.



두 함수는 서로 역함수이므로 색칠된 부분의 넓이는 같다.

파란색 부분의 넓이를 구하기 위해서는 오른쪽 그림과 같이 사각형에서 빨간색 부분을 빼야 한다.



$$\therefore\ \int_1^{33}g(x)dx=2\times33-\int_0^2 f(x)dx$$

$$=66-\left[x^4+x\right]_0^2$$

$$=48$$

16번 ①

$f'(x) = 3x^2 + 12x - 15$ 이므로
$= 3(x+5)(x-1)$

$x = 1$에서 극솟값 $f(1) = 2$를 갖는다.

$\therefore\ a + b = 3$

17번 ③

선분 AB를 한 변으로 하는 정삼각형이 원에 내접하므로 원점은 정삼각형의 내심(=무게중심)이다.

따라서 원점으로부터 직선까지의 거리는 1이다.

$$\frac{|5|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1$$

$$a^2 + b^2 = 25$$

따라서 가능한 순서쌍은

$(3,\ 4),\ (3,\ -4),\ (-3,\ 4),\ (-3,\ -4)$

$(4,\ 3),\ (4,\ -3),\ (-4,\ 3),\ (-4,\ -3)$

$(0,\ 5),\ (0,\ -5),\ (5,\ 0),\ (-5,\ 0)$

$\therefore$ 순서쌍은 총 12가지

18번 ④

첫 번째 극한 조건에 의해

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + ax + b \quad ㉠$$

두 번째 조건에 의해 $f(2) = f(-2) = 0$이므로 ㉠에 대입하면,

$$4 + 2a + b = 0,\ 4 - 2a + b = 0$$

따라서 $a = 0,\ b = -4$

$$f(x) = x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2-4)(x^2+1)$$

$\therefore\ \lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2}(x^2+1) = 5$

$\therefore\ k = 5$

19번 ④

모든 확률의 합=1이므로 $a = \frac{1}{3}$

$P(X^2 - 3X + 2 \le 0)$
$= P\{(X-1)(X-2) \le 0\}$
$= P(1 \le X \le 2)$
$= P(X=1) + P(X=2)$
$= \frac{2}{3}$

20번 ①

$x \to 3$일 때 분모가 0이므로 분자도 0이다.

따라서 $a = -1$

주어진 식의 분자를 유리화하면

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x^2+x-3}+x)}$$
$$= \lim_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x^2+x-3}+x}$$
$$= \frac{1}{6}$$

$\therefore\ a + b = -\frac{5}{6}$