2020년 제1차 경찰공무원(순경) 수학 해설

01. ④	02. ②	03. ③	04. ①	05. ①	06. ④	07. ③	08. ③	09. ②	10. ②
11. ④	12. ②	13. ③	14. ③	15. ①	16. ④	17. ①	18. ②	19. ④	20. ①

1.【정답】④

$f(x)=(x-1)Q(x)+3$

$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(2)$이므로

$f(2)=(2-1)Q(2)+3$, $Q(2)=f(2)-3=6-3$

2.【정답】②

두 근 α, β가 켤레관계이므로 $\alpha=\overline{\beta}$, $\beta=\overline{\alpha}$이다.

$\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot\frac{1}{2}=0$

3.【정답】③

x에 관하여 내림차순으로 정리하면

$2x^2+(3y+a)x+y^2+y-2=2x^2+(3y+a)x+(y+2)(y-1)$

따라서 $3y+a=2(y+2)+(y-1)$ 또는 $3y+a=(y+2)+2(y-1)$이다.

$3y+a=3y+3$, $3y+a=3y$

$a\neq 0$이므로 $a=3$

4.【정답】①

PA를 $1:2$로 내분하는 점은 $\left(\frac{-1+2a}{1+2}, \frac{-1+2b}{1+2}\right)$

$-1+2a=0$, $a=\frac{1}{2}$, $b=-a+2=\frac{3}{2}$

$a\times b=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$

5.【정답】①

$x-m=2x^2-3x$, $2x^2-4x+m=0$

$\frac{D}{4}=2^2-2m=0$, $m=2$

이때 $2x^2-4x+2=0$이므로 $x=1$, 따라서 점 A는 $(1, -1)$이다.

$d=\frac{|1+1-4|}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, $m\times d=2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

6.【정답】④

$ax = x^2 + 2kx + k^2 - k + b = 0$

$x^2 + (2k - a)x + k^2 - k + b = 0$

$D = (2k-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k^2 - k + b) = 0$

$4k^2 - 4ak + a^2 - 4k^2 + 4k - 4b = 0$

$(-4a + 4)k + a^2 - 4b = 0$

k에 관한 항등식이므로 $a = 1$, $b = \frac{1}{4}$, $\frac{a}{b} = 4$

7.【정답】③

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 4$, $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 2^2$

따라서 두 원의 중심사이의 거리는 $\sqrt{(3-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$

선분 AB의 길이의 최댓값은 두 원의 중심사이의 거리에 두 원의 반지름을 더한 값이므로

$\sqrt{5} + 2 + 3 = 5 + \sqrt{5}$

8.【정답】③

$\sqrt{x-5} = m(x-1)$

$x - 5 = m^2(x^2 - 2x + 1)$

$m^2x^2 - (2m^2 + 1)x + m^2 + 5 = 0$

$D = 4m^4 + 4m^2 + 1 - 4 \cdot m^2 \cdot (m^2 + 5) = 4m^2 - 20m^2 + 1 = 0$, $m = \frac{1}{4}$

접할 때 기울기가 $\frac{1}{4}$이므로 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 m의 값의 범위는 $0 < m < \frac{1}{4}$이다. 따라서 $a = 0$, $b = \frac{1}{4}$

$2a + 4b = 2 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$

9.【정답】②

$\sum_{k=1}^{10}\left(k - \frac{1}{\alpha}\right)\left(k - \frac{1}{\beta}\right) = \sum_{k=1}^{10}\left(k^2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)k + \frac{1}{\alpha\beta}\right)$

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-2}{-1} = 2$이므로 주어진 식은 $\sum_{k=1}^{10}(k^2 - 2k - 1)$이다.

$\sum_{k=1}^{10}(k^2 - 2k - 1) = 385 - 2 \cdot 55 - 10 = 265$

10. 【정답】 ②

수열 a_n이 등차수열이므로 $S_n = an^2 + bn$으로 놓을 수 있다.

$S_1 = a_1 = a + b = 69$

$S_9 = 81a + 9b$, $S_{15} = 225a + 15b$

$81a + 9b = 225a + 15b$, $144a + 6b = 0$

$24a + b = 0$, $b = -24a$

$a = -3$, $b = 72$

따라서 $S_n = -3n^2 + 72n$이므로 $S_n = -3(n^2 - 24n + 144) + 432$

$S_n = -3(n-12)^2 + 432$이므로 S_n이 최대가 되는 n의 값은 12이다.

11. 【정답】 ④

$a\sqrt{2} + b = 0$, $b = -a\sqrt{2}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x+1}+b}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{a(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{a(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{a}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}} = 1,\ a = 2\sqrt{2}$$

$a^2 + b^2 = 8 + 4^2 = 8 + 16 = 24$

12. 【정답】 ②

$\frac{1}{x} = t$로 치환하면 $x \to \infty$일 때 $t \to 0$이므로 주어진 식을 변형하면

$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t^3 + 2t^2 + 3t + 4}$이다.

$$\frac{x^2+2}{x^3+2x^2+3x+4} \le \frac{f(x)}{x^3+2x^2+3x+4} \le \frac{x^3+3x+2}{x^3+2x^2+3x+4},$$

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2}{x^3+2x^2+3x+4} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x+2}{x^3+2x^2+3x+4} = \frac{1}{2}$이므로 $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t^3+2t^2+3t+4} = \frac{1}{2}$
이다.

13. 【정답】 ③

$a = 1 + \log_{\sqrt{2}}3 = \log_2 2 + 2\log_2 3 = \log_2 18$

$b = \log_9 4 - 1 = \log_3 2 - \log_3 3 = \log_3\frac{2}{3}$

$2^a \times 3^b = 18 \times \frac{2}{3} = 12$

14. 【정답】 ③

$x_1 - x_2 < 0$이므로 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, $f(x_1) < f(x_2)$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 모든 양의 실수에 대하여 증가함수이어야 한다.

$f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3a^2 - 9 = 3(x^2 + 2ax + a^2 - 3) = 3((x+a)^2 - 3)$

대칭축 $x = -a < 0$이고, $f(0) = 3a^2 - 9 \geq 0$이어야 하므로

$a > 0$, $a \leq -\sqrt{3}$ 또는 $a \geq \sqrt{3}$

따라서 실수 a의 최솟값은 $\sqrt{3}$ 이다.

15. 【정답】 ①

직선 $y = -x + k$와 곡선 $y = f(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선 $y = -x + k$가 곡선 $f(x)$의 $f'(x) = -1$인 지점을 지나면 되므로

$f'(x) = -3x^2 + 2 = -1$, $x = \pm 1$

$f(-1) = 1 - 2 + 3 = 2$, $f(1) = -1 + 2 + 3 = 4$이므로

$y = -x + 1$, $y = -x + 5$이다. 모든 양수 k의 합은 $1 + 5 = 6$

16. 【정답】 ④

$x = 0$에서 연속이므로 $a|0-1| = a = 2$

$\int_0^2 f(x)dx = 2$이므로 (삼각형의 넓이) $\int_{-2}^0 f(x)dx = -4$이다.

$\int_{-2}^0 (2bx+2)dx = \left[bx^2 + 2x\right]_{-2}^0 = -4b + 4 = -4$, $b = 2$

$a + b = 2 + 2 = 4$

17. 【정답】 ①

$\int_0^1 f(x)dx = k$라 하면

$\int_0^x f(t)dt = x^3 + 2x^2 - 2kx$, 양변을 미분하면 $f(x) = 3x^2 + 4x - 2k$

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (3x^2 + 4x - 2k)dx = \left[x^3 + 2x^2 - 2kx\right]_0^1 = 1 + 2 - 2k = k$

$3k = 3$, $k = 1$

$f(x) = 3x^2 + 4x - 2$, $f(1) = 3 + 4 - 2 = 5$

18. 【정답】 ②

움직이는 방향이 바뀌는 시각은 속도 $v(t)=0$일 때 이므로

$-\frac{1}{2}t+3=0,\ t=6$

시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2 \frac{1}{2}t^2dt+\int_2^6\left(-\frac{1}{2}t+3\right)dt=\left[\frac{1}{6}t^3\right]_0^2+\left[-\frac{1}{4}t^2+3t\right]_2^6=\frac{4}{3}-8+12=\frac{16}{3}$$

19. 【정답】 ④

전체 확률에서 임의 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 홀수 1개, 짝수 1개가 나올 확률을 빼주면 된다.

$$1-\frac{{}_5C_1\times{}_4C_1}{{}_9C_2}=1-\frac{5\times4}{36}=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$$

20. 【정답】 ①

$P(X=1)={}_nC_1p(1-p)^{n-1},\ P(X=n-1)={}_nC_{n-1}p^{n-1}(1-p)^1$

${}_nC_1p(1-p)^{n-1}={}_nC_{n-1}p^{n-1}(1-p)^1$

$(1-p)^{n-2}=p^{n-2},\ 1-p=p,\ p=\frac{1}{2}$

$V(X)=np(1-p)=15,\ n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=15$

$n=60$