1번 ④

$x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$f(x)=(x-1)Q(x)+3 \quad ㉠$$

$x-2$로 나누었을 때의 나머지가 6이므로 $f(2)=6$

$Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(2)$

㉠의 양 변에 $x=2$를 대입하면

$$f(2)=Q(2)+3$$

$\therefore\ Q(2)=3$

2번 ②

실 계수 이차방정식의 두 허근이므로 $\beta=\overline{\alpha}$이다. 따라서

$$\alpha\overline{\beta}=\alpha^2,\ \overline{\alpha}\beta=\beta^2$$

근과 계수와의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=0$

3번 ③

x에 대한 내림차순으로 정리하면,

(준식) = $2x^2+(3y+a)x+(y+2)(y-1)$

다음 두가지의 형태로 인수분해가 가능하다.

$$\{2x+(y+2)\}\{x+(y-1)\} \quad ㉠$$

$$\{2x+(y-1)\}\{x+(y+2)\} \quad ㉡$$

㉠을 전개하면 $a\neq0$이므로 ㉡의 형태이다.

$2x^2+(3y+3)x+(y-1)(y+2)$이므로

$\therefore\ a=3$

4번 ①

점 P가 직선 $x+y-2=0$위에 있으므로

$$a+b-2=0 \quad ㉠$$

$\overline{PA}$를 $1:2$로 내분하는 점은 다음과 같다.

$$\left(\frac{-1+2a}{3},\ \frac{-1+2b}{3}\right)$$

이 점이 y축 위에 있으므로 $b=\frac{1}{2}$

㉠에 대입하면 $a=\frac{3}{2}$

$\therefore\ \frac{ab=3}{4}$

5번 ①

이차함수와 직선이 접하므로 방정식 $2x^2-3x=x-m$은 중근을 갖는다. 따라서 $m=2$, 중근이 $x=1$ 이므로 접점의 좌표는 $(1,\ -1)$이다.

$A(1,\ -1)$과 직선 $x-y-4=0$사이의 거리는

$$d=\frac{|1-(-1)-4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$\therefore\ m\times d=2\sqrt{2}$

6번 ④

이차함수와 직선이 접하므로 방정식

$x^2+2kx+k^2-k+b=ax$는 중근을 갖는다.

$x^2+(2k-a)x+k^2-k+b=0$의 판별식을 D라 하면,

$$D=(2k-a)^2-4(k^2-k+b)=0$$

k에 대한 내림차순으로 정리하면,

$$(-4a+4)k+a^2-4b=0$$

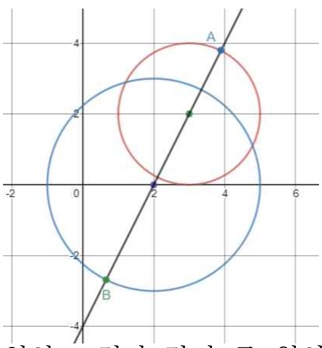
k값에 관계없이 성립하므로 $a=1,\ b=\frac{1}{4}$

$\therefore\ \frac{a}{b}=4$

7번 ③

$(x-3)^2+(y-2)^2=4,\ (x-2)^2+y^2=9$ 이므로

두 원의 중심은 $(3,\ 2)$, $(2,\ 0)$이고 반지름은 2, 3이다.

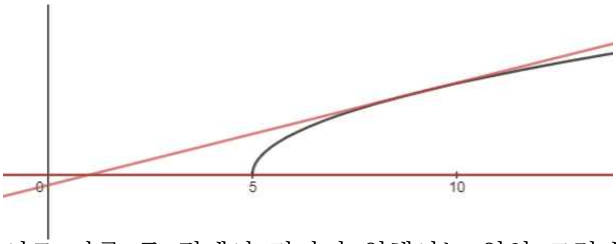


위의 그림과 같이 두 원의 중심을 지나는 직선의 양 끝에 A, B가 위치할 때 그 길이가 최대이다.

따라서 선분 AB의 최댓값은 두 원의 중심사이의 거리 + 두 원의 반지름이다.

$\therefore$ 선분 AB의 최댓값 $5+\sqrt{5}$

8번 ③



서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는 위의 그림에서 두 직선의 사이로 지나가야한다.

$\sqrt{x-5}=m(x-1)$이 중근을 가져야하므로

양변을 제곱하여 정리하면,

$$m^2x^2-(2m^2+1)x+m^2+5=0$$

$$D=(2m^2+1)^2-4m^2(m^2+5)=0$$

$$-16m^2+1=0$$

$\therefore\ m=\dfrac{1}{4}\ \ (\because m>0)$

따라서 두 점에서 만나기 위한 m의 범위는 $0<m<\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ 2a+4b=1$

9번 ②

근과 계수와의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-1$

$$\left(k-\frac{1}{\alpha}\right)\left(k-\frac{1}{\beta}\right)=k^2-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)k+\frac{1}{\alpha\beta}=k^2-2k-1$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}(k^2-2k-1)=\sum_{k=1}^{10}(k-1)^2-2$$

$$=\frac{9\times10\times19}{6}-20=265$$

10번 ②

$S_9=S_{15}$이므로

$$\frac{(2a_1+8d)}{2}\times9=\frac{(2a_1+14d)}{2}\times15$$

위의 식을 정리하면,

$$3a_1+12d=5a_1+35d$$

$$23d=-2a_1=-2\times69$$

따라서 $d=-6,\ a_n=-6n+75$

$$a_{12}=3,\ a_{13}=-3$$

$\therefore\ S_{12}$가 최대

11번 ④

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+1}+b}{x-1}=1 \qquad ㉠$$

$a\sqrt{2}+b=0$이므로 $b=-a\sqrt{2}$

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+1}-a\sqrt{2}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{a}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{a}{2\sqrt{2}}=1$$

따라서 $a=2\sqrt{2},\ b=-4$

$\therefore\ a^2+b^2=24$

12번 ②

주어진 부등식의 각 변에 극한을 취하면,

$$2\le\lim_{x\to0}f(x)\le2$$

따라서 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=2$

$\dfrac{1}{x}=t$로 치환하면, $x\to\infty,\ t\to0$

(준식) = $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t^3+2t^2+3t+4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

13번 ③

$$2^a=2^{(1+\log_{\sqrt{2}}3)}=2^1\times2^{\log_{\sqrt{2}}3}=18$$

$$3^b=3^{\log_9 4-1}=3^{\log_9 4}\times3^{-1}=\frac{2}{3}$$

$\therefore\ 2^a\times3^b=12$

14번 ③

$x_1-x_2<0$이므로 $f(x_1)<f(x_2)$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x>0$인 실수 전체에서 극값이 존재하지 않아야 한다.

한편 $f'(x)=3x^2+6ax+3a^2-9$에 대하여

$$D=(3a)^2-3(3a^2-9)=27>0$$

이므로 항상 2개의 극값을 갖는다.

두 근이 모두 $x \le 0$이어야 하므로

$f(0) \ge 0$, 축<0을 만족해야 한다.

$3a^2-9 \ge 0$이므로 $a^2 \ge 3$,

축$=-a<0$이므로 $a>0$

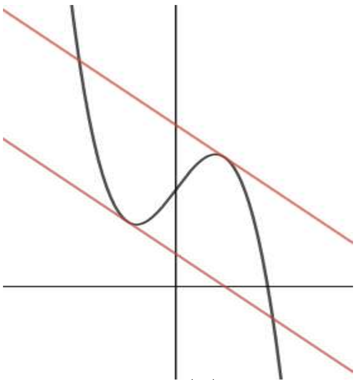
두 부등식을 동시에 만족시켜야 하므로 $a \ge \sqrt{3}$

$\therefore$ 실수 a의 최솟값은 $\sqrt{3}$

15번 ①

$f'(x)=-3x^2+2$

$f'(x)=0$이 서로 다른 2개의 실근을 가지므로 함수 $f(x)$는 두 개의 극값을 갖는다. 따라서 이 그래프와 직선이 두 점에서 만나기 위해서는 아래의 그림과 같이 접해야 한다.



$x=\pm 1$에서 $f'(x)=-1$이므로

접점의 좌표는 $(-1,\ 2)$, $(1,\ 4)$이다.

두 점을 $y=-x+k$에 대입하면 $k=1,\ 5$

$\therefore$ 모든 양수 k의 합은 6

16번 ④

실수 전체에서 연속이므로 $x=0$에서 만나야 한다.

따라서 $a=2$

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{0}(2bx+2)dx + \int_{0}^{2} 2|x-1|dx$$
$$= [bx^2+2x]_{-2}^{0}+2$$
$$=-4b+6=-2$$

따라서 $b=2$

$\therefore$ $a+b=4$

17번 ①

양 변을 x에 대하여 미분하면,

$$f(x)=3x^2+4x-2\int_0^1 f(x)dx$$

$\int_0^1 f(x)dx = k$이라 하면 $f(x)=3x^2+4x-2k$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (3x^2+4x-2k)dx$$
$$= [x^3+2x^2-2kx]_0^1$$
$$= 3-2k=k$$

따라서 $k=1$, $f(x)=3x^2+4x-2$이므로

$\therefore$ $f(1)=5$

18번 ②

속도의 부호가 바뀌는 지점에서 움직이는 방향이 바뀐다.

따라서 $t=6$에서 움직이는 방향이 바뀐다.

$t=0$부터 $t=6$가지 이동한 거리는,

$$\int_0^6 v(t)dt = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}t^2\right)dt + \int_2^6 \left(-\frac{1}{2}t+3\right)dt$$
$$= \left[\frac{1}{6}t^3\right]_0^2 + \left[-\frac{1}{4}t^2+3t\right]_2^6$$
$$= \frac{4}{3}+\{(-9+18)-(-1+6)\}=\frac{16}{3}$$

19번 ④

2개의 공을 꺼내는 방법의 수 : ${}_9C_2=36$

홀수, 짝수 1개씩 꺼내는 방법의 수 : $5\times 4=20$

$\therefore$ $\dfrac{36-20}{36}=\dfrac{4}{9}$

20번 ①

$$P(X=1)={}_nC_1\times p^1\times(1-p)^{n-1}$$
$$P(X=n-1)={}_nC_{n-1}\times p^{n-1}\times(1-p)^1$$

두 값이 같으므로

$${}_nC_1\times p^1\times(1-p)^{n-1}={}_nC_{n-1}\times p^{n-1}\times(1-p)^1$$
$$(1-p)^{n-2}=p^{n-2}$$

따라서 $p=\dfrac{1}{2}$

$$V(X)=n\times p\times(1-p)=n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=15$$

$\therefore$ $n=60$