

2018학년도 7월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

수학 영역

가형 정답

1	⑤	2	②	3	④	4	②	5	①
6	③	7	⑤	8	④	9	①	10	①
11	④	12	③	13	⑤	14	②	15	①
16	⑤	17	④	18	③	19	③	20	①
21	②	22	4	23	6	24	24	25	15
26	100	27	26	28	8	29	486	30	125

가형 해설

1. [출제의도] 평면벡터의 성분의 합 계산하기

$$2\vec{a} - \vec{b} = 2(4, 5) - (-3, 2) = (11, 8)$$

따라서 모든 성분의 합은 $11 + 8 = 19$

2. [출제의도] 지수함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{2x} = \frac{3}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} = \frac{3}{2}$$

3. [출제의도] 좌표공간에서 선분의 내분점의 좌표 계산하기

선분 OA를 1:2로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 6 + 2 \times 0}{1+2}, \frac{1 \times 3 + 2 \times 0}{1+2}, \frac{1 \times 9 + 2 \times 0}{1+2} \right)$$

이므로 $(2, 1, 3)$
따라서 $a + b + c = 6$

4. [출제의도] 사건의 독립 이해하기

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

따라서 $P(B) = \frac{1}{4}$

5. [출제의도] 곱의 미분법 이해하기

함수 $f(x) = x \ln x$ 에서 $f'(x) = \ln x + 1$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = 1$$

6. [출제의도] 원순열을 활용하여 확률 문제해결하기

A, B를 포함한 6명이 원형의 탁자에 일정한 간격을 두고 앉는 경우의 수는

$$(6-1)! = 5! = 120$$

A, B가 이웃하여 6명이 원형의 탁자에 일정한 간격을 두고 앉는 경우의 수는

$$2! \times (5-1)! = 2! \times 4! = 48$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{48}{120} = \frac{2}{5}$

7. [출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법 이해하기

$$\frac{dx}{dt} = 2e^{2t-6}, \quad \frac{dy}{dt} = 2t-1$$

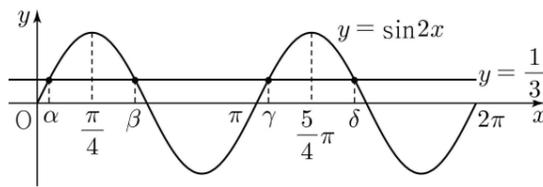
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t-1}{2e^{2t-6}}$$

따라서 $t = 3$ 일 때, $\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2e^0} = \frac{5}{2}$

8. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

$0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때, 방정식 $\sin 2x = \frac{1}{3}$ 을

만족시키는 해는 두 함수 $y = \sin 2x$, $y = \frac{1}{3}$ 의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.



네 교점의 x좌표 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 에 대하여

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{4} \text{ 이고 } \frac{\gamma + \delta}{2} = \frac{5\pi}{4} \text{ 이므로}$$

방정식의 모든 해의 합은

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 3\pi$$

9. [출제의도] 분수함수의 정적분 이해하기

$$\begin{aligned} \int_3^6 \frac{2}{x^2-2x} dx &= \int_3^6 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= [\ln|x-2| - \ln|x|]_3^6 \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

10. [출제의도] 조건부확률을 활용하여 문제해결하기

역사 동아리 학생 중 임의로 선택한 1명이 박물관 A를 선택한 학생인 사건을 X, 1학년 학생인 사건을 Y라 하면

$$P(Y|X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{\frac{9}{32}}{\frac{24}{32}} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

11. [출제의도] 조합을 활용하여 문제해결하기

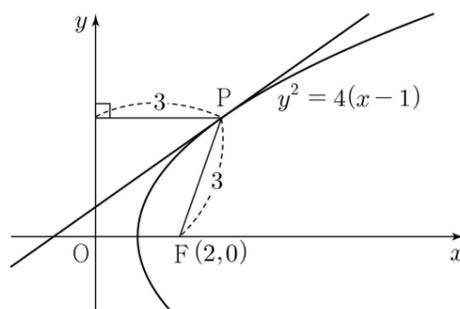
남학생 4명을 세 개의 모둠으로 나누는 경우의 수는

$${}^4C_2 \times {}^2C_1 \times {}^1C_1 \times \frac{1}{2!} = 6$$

모든 모둠에 남학생과 여학생이 각각 1명 이상 포함되도록 세 개의 모둠으로 나누는 경우의 수는

$$6 \times 3! = 36$$

12. [출제의도] 포물선의 정의와 음함수의 미분법 이해하기



포물선 $y^2 = 4(x-1)$ 의 초점은 $F(2, 0)$, 준선은 $x = 0$ 이다.

$PF = 3$ 이므로 점 P에서 준선 $x = 0$ 에 내린 수선의 발까지의 거리는 3

점 P의 좌표는 $(3, 2\sqrt{2})$

$y^2 = 4(x-1)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2y \frac{dy}{dx} = 4 \text{ 이므로}$$

$$x = 3, y = 2\sqrt{2} \text{ 를 대입하면}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 점 P에서의 접선의 기울기는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

13. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

곡선 $y = e^x$ 과 접선 l이 만나는 접점의 x좌표를 t라 하면 점 (t, e^t) 에서의 접선의 기울기는

e^t 이므로 접선 l의 방정식은

$$y = e^t(x-t) + e^t$$

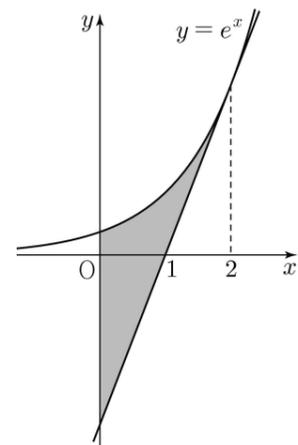
접선 l이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$e^t(1-t) + e^t = 0$$

$$(2-t)e^t = 0$$

$$t = 2$$

곡선 $y = e^x$ 과 y축 및 직선 l으로 둘러싸인 부분은 다음 그림의 색칠된 부분과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{e^x - (e^2x - e^2)\} dx \\ &= \int_0^2 (e^x - e^2x + e^2) dx \\ &= \left[e^x - \frac{e^2}{2}x^2 + e^2x \right]_0^2 = e^2 - 1 \end{aligned}$$

14. [출제의도] 역함수 미분법 이해하기

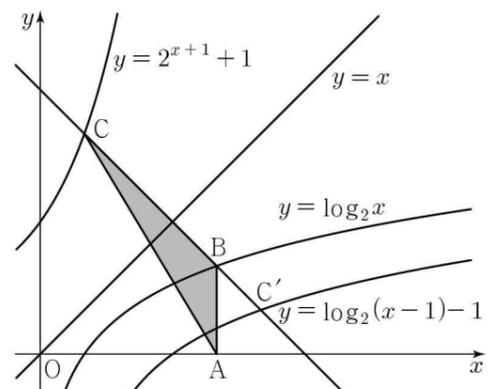
$$f(1) = 0 \text{ 이므로 } g(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{2x \times x - (x^2 - 1)}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \text{ 이므로}$$

$$g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}$$

15. [출제의도] 지수함수와 로그함수 이해하기



점 A(4, 0)을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y = \log_2 x$ 와 만나는 점은 B(4, 2)이다. 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y = 2^{x+1} + 1$ 과 만나는 점을 C(a, b)라 하자. 점 C를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동시킨 점 C'(b, a)는 곡선 $y = \log_2(x-1) - 1$ 위에 있다.

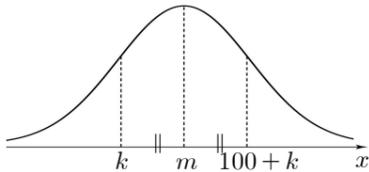
점 C'을 x축 방향으로 -1만큼, y축 방향으로 1만큼 평행이동시킨 점 (b-1, a+1)은 B이다.

$a+1=2, b-1=4$ 이므로
 $a=1, b=5$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$

16. [출제의도] 표준정규분포를 활용하여 문제해결하기

확률변수 X는 정규분포 $N(m, 8^2)$ 을 따른다. 조건 (가)를 만족시키는 정규분포의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다.



$m - k = (100 + k) - m, k = m - 50$

$P(X \geq 2k) = P\left(Z \geq \frac{m-100}{8}\right) = 0.0668$

$0.5 - P\left(Z \geq \frac{m-100}{8}\right)$

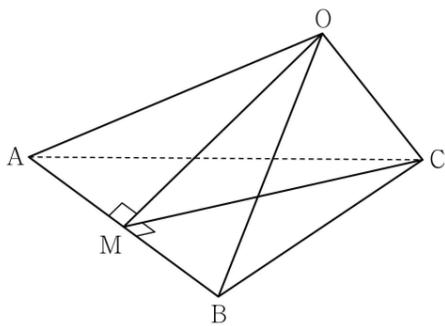
$= P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-100}{8}\right) = 0.4332$

$\frac{m-100}{8} = 1.5$

따라서 $m = 112$

17. [출제의도] 정사영 이해하기

점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 M이라 하자.

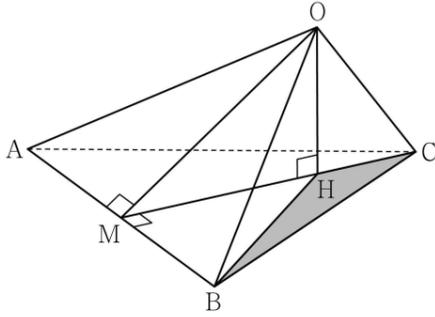


$\overline{OC} \perp$ (평면 OAB), $\overline{CM} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ 이고 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 이다.

$\overline{MC} = 3\sqrt{3}, \overline{OM} = 3\sqrt{2}$

점 O에서 선분 MC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{OH} \perp$ (평면 ABC)이므로 점 O의 평면 ABC 위로의 정사영은 점 H이다.



$\frac{1}{2} \times \overline{OM} \times \overline{OC} = \frac{1}{2} \times \overline{MC} \times \overline{OH}$ 이므로

$\overline{OH} = \sqrt{6}, \overline{HC} = \sqrt{3}, \overline{MH} = 2\sqrt{3}$

삼각형 OBC의 평면 ABC 위로의 정사영은 삼각형 HBC이고 점 H는 선분 CM을 1:2로 내분한다.

($\triangle HBC$ 의 넓이) = $\frac{1}{6} \times$ ($\triangle ABC$ 의 넓이)

따라서 정사영의 넓이는 $\frac{1}{6} \times 9\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

18. [출제의도] 확률변수의 평균을 구하는 과정 추론하기

공에 번호를 부여하는 모든 경우의 수를 N이라 하면 N은 서로 같은 흰 공 4개와 서로 같은 검은 공 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$N = \boxed{35}$ 이고, 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이다.

(i) X=2일 때,

번호 2가 부여된 흰 공 앞에 흰 공 1개, 번호 2가 부여된 흰 공 뒤에 흰 공 2개와 검은 공 3개를 나열하는 경우의 수는

$1 \times \frac{5!}{2! \times 3!}$ 이므로

$P(X=2) = \frac{10}{N}$

(ii) X=3일 때,

번호 3이 부여된 흰 공 앞에 흰 공 1개와 검은 공 1개, 번호 3이 부여된 흰 공 뒤에 흰 공 2개와 검은 공 2개를 나열하는

경우의 수는 $2! \times \frac{4!}{2! \times 2!}$ 이므로

$P(X=3) = \frac{12}{N}$

(iii) X=4일 때,

번호 4가 부여된 흰 공 앞에 흰 공 1개와 검은 공 2개, 번호 4가 부여된 흰 공 뒤에 흰 공 2개와 검은 공 1개를 나열하는 경우의 수는 $\boxed{9}$ 이므로

$P(X=4) = \frac{9}{N}$

(iv) X=5일 때,

확률질량함수의 성질에 의하여

$P(X=5) = 1 - \{P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)\}$

따라서 $E(X) = \sum_{k=2}^5 \{k \times P(X=k)\} = \boxed{\frac{16}{5}}$

$a = \frac{7!}{4! \times 3!} = 35, b = \frac{3!}{2!} \times \frac{3!}{2!} = 9$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
P(X=x)	$\frac{10}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

$c = 2 \times \frac{10}{35} + 3 \times \frac{12}{35} + 4 \times \frac{9}{35} + 5 \times \frac{4}{35} = \frac{16}{5}$

따라서 $a + b + 5c = 60$

19. [출제의도] 미분을 활용하여 함수의 그래프 추론하기

ㄱ. $g'(x) = \frac{1}{\ln 3} \times \frac{4x^3}{x^4 + 2n}$ 이므로

$g'(f(1)) = g'(0) = 0$

$h'(1) = g'(f(1))f'(1) = 0$ (참)

ㄴ. $h(x) = g(f(x)) = \log_3 [\{f(x)\}^4 + 2n]$

$h'(x) = \frac{1}{\ln 3} \times \frac{4\{f(x)\}^3 f'(x)}{\{f(x)\}^4 + 2n}$

$= \frac{1}{\ln 3} \times \frac{4nx^{n-1}(x^n - 1)^3}{(x^n - 1)^4 + 2n}$

열린 구간 (0, 1)에서

$-1 < x^n - 1 < 0$ 이므로 $h'(x) < 0$ 이다.

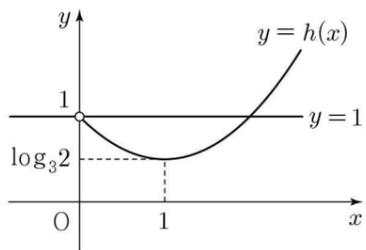
열린 구간 (0, 1)에서

함수 h(x)는 감소한다. (거짓)

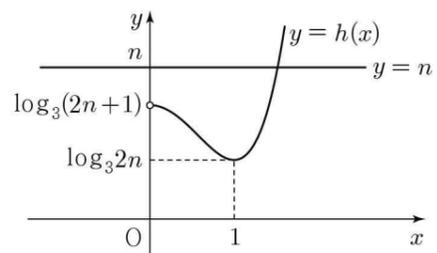
ㄷ. $x > 0$ 에서 함수 h(x)는 $x=1$ 에서 극솟값 $\log_3 2n$ 을 갖는다.

함수 h(x)의 그래프의 개형은 다음과 같다.

(i) n=1일 때,



(ii) n ≥ 2일 때,



(i), (ii)에 의하여 방정식 $h(x) = n$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

20. [출제의도] 여러 가지 함수의 정적분을 활용하여 문제해결하기

$u'(x) = x, v(x) = g(x)$ 라 하면

$u(x) = \frac{1}{2}x^2, v'(x) = g'(x)$

조건 (가)에 의하여 $g(1) = 0,$

$g'(x) = \frac{f(x^2+1)}{x}$

$$\int_1^2 xg(x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2g(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2g'(x)dx$$

$$= 2g(2) - \frac{1}{2}g(1) - \int_1^2 \left\{ \frac{1}{2}x^2 \times \frac{f(x^2+1)}{x} \right\} dx$$

$$= 2 \times 3 - \frac{1}{2} \times 0 - \frac{1}{2} \int_1^2 xf(x^2+1)dx$$

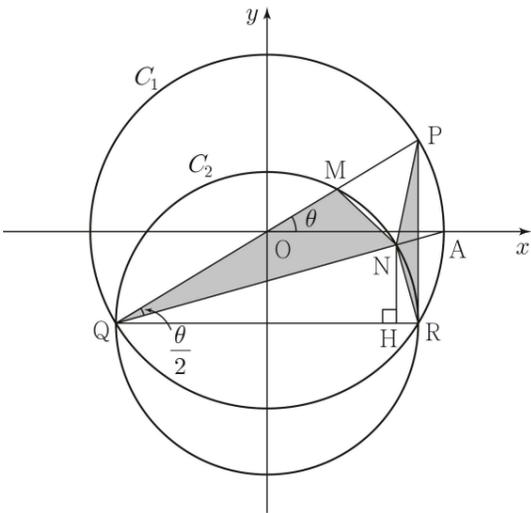
$x^2+1=t$ 라 하자.

$$\int_1^2 xg(x)dx$$

$$= 6 - \frac{1}{2} \int_2^5 \frac{1}{2}f(t)dt$$

$$= 6 - \frac{1}{4} \times 16 = 2$$

21. [출제의도] 삼각함수의 극한값 추론하기



원 C_1 위의 점 P에 대하여 $\widehat{PA} = \widehat{AR}$ 이므로
 $\angle PQA = \angle AQR = \frac{\theta}{2}$

$\angle PRQ = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$\overline{PR} = 2 \sin \theta$, $\overline{QR} = 2 \cos \theta$

$\angle QMR = \angle QNR = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$\overline{QM} = 2 \cos \theta \cos \theta$, $\overline{QN} = 2 \cos \theta \cos \frac{\theta}{2}$

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{QM} \times \overline{QN} \times \sin \frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \cos^2 \theta \times 2 \cos \theta \cos \frac{\theta}{2} \times \sin \frac{\theta}{2}$$

$$= 2 \cos^3 \theta \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

점 N에서 선분 QR에 내린 수선의 발을 H라 하면 $T(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{PR} \times \overline{HR}$

$\overline{HR} = \overline{QR} - \overline{QH} = 2 \cos \theta - \overline{QN} \cos \frac{\theta}{2}$

$$= 2 \cos \theta - 2 \cos \theta \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$= 2 \cos \theta \left(1 - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

$$= 2 \cos \theta \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$T(\theta) = \frac{1}{2} \times 2 \sin \theta \times 2 \cos \theta \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$= 2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta^2 \times S(\theta)}{T(\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta^2 \times 2 \cos^3 \theta \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\cos^2 \theta \cos \frac{\theta}{2} \right) \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta^2}{\sin \theta \sin \frac{\theta}{2}}$$

$$= 1 \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(2 \times \frac{\theta}{\sin \theta} \times \frac{\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right)$$

$$= 2$$

22. [출제의도] 자연수의 분할 계산하기

자연수 7을 3개의 자연수로 분할하는 경우는
 $7 = 1 + 1 + 5$
 $= 1 + 2 + 4$
 $= 1 + 3 + 3$
 $= 2 + 2 + 3$
따라서 경우의 수는 4

23. [출제의도] 지수부등식 계산하기

$$(2^x)^2 - 10 \times 2^x + 16 \leq 0$$

$$(2^x - 2)(2^x - 8) \leq 0$$

$$2 \leq 2^x \leq 8$$

$$1 \leq x \leq 3$$

만족시키는 자연수는 1, 2, 3이다.

$$1 + 2 + 3 = 6$$

24. [출제의도] 벡터의 내적 이해하기

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(4t, \frac{3}{t} \right)$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 16t^2 + \frac{9}{t^2} \text{ 이고 } t^2 > 0 \text{ 이므로}$$

절대부등식의 성질에 의하여

$$16t^2 + \frac{9}{t^2} \geq 2 \sqrt{16t^2 \times \frac{9}{t^2}} = 24$$

따라서 $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때, $|\vec{a} + \vec{b}|^2$ 의 최솟값은

24

25. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리 이해하기

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{\tan \alpha - 1}{1 + \tan \alpha} = \frac{7}{8}$$

$$8(\tan \alpha - 1) = 7(1 + \tan \alpha)$$

$$\tan \alpha = 15$$

26. [출제의도] 중복조합 이해하기

9 이하의 음이 아닌 정수 a, b, c, d 에 대하여 네 자리 이하의 자연수를

$a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d$ 라 하자.

3000보다 작은 네 자리 자연수 중 각 자리의 수의 합이 10이므로

$$1 \leq a \leq 2 \text{ 이고 } a + b + c + d = 10$$

(i) $a = 1$ 인 경우

$b + c + d = 9$ 를 만족시키는 음이 아닌 세

정수 b, c, d 의 순서쌍 (b, c, d) 의 개수는

$${}_3H_9 = {}_{11}C_9 = 55$$

(ii) $a = 2$ 인 경우

$b + c + d = 8$ 을 만족시키는 음이 아닌 세 정수 b, c, d 의 순서쌍 (b, c, d) 의

개수는

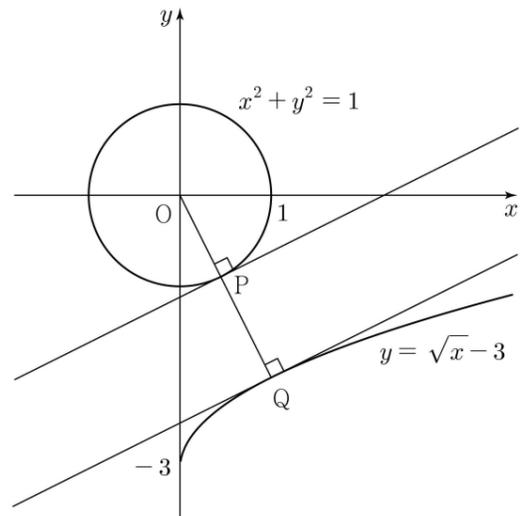
$${}_3H_8 = {}_{10}C_8 = 45$$

(i), (ii)에 의하여 경우의 수는 100

27. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

곡선 $y = \sqrt{x} - 3$ 위의 임의의 점 Q의 좌표를 $(t, \sqrt{t} - 3)$ ($t \geq 0$)이라 하고, 원점을 O라 하자.

선분 PQ의 길이가 최소가 되려면 점 Q에 대하여 선분 OQ와 원 $x^2 + y^2 = 1$ 이 만나는 점이 P이고, 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기와 곡선 $y = \sqrt{x} - 3$ 위의 점 Q에서의 접선의 기울기가 같아야 한다.



곡선 $y = \sqrt{x} - 3$ 위의 점 $Q(t, \sqrt{t} - 3)$ ($t > 0$)에서의 접선과 직선 OQ는 수직이다.

$$\frac{1}{2\sqrt{t}} \times \frac{\sqrt{t} - 3}{t} = -1$$

$$2(\sqrt{t})^3 + \sqrt{t} - 3 = 0$$

$$(\sqrt{t} - 1)(2t + 2\sqrt{t} + 3) = 0$$

$t = 1$ 이므로 $Q(1, -2)$ 이다.

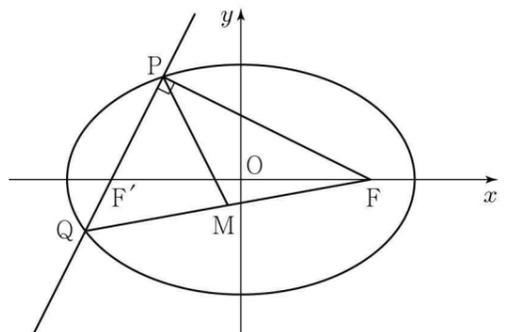
$$\overline{PQ} = \overline{OQ} - 1$$

$$= \sqrt{5} - 1$$

$$a = 5, b = 1 \text{ 이므로 } a^2 + b^2 = 26$$

28. [출제의도] 타원의 정의를 활용하여 문제해결하기

$\overline{QM} = \overline{FM} = \overline{PM} = 5$ 이므로 세 점 P, Q, F는 중심이 M이고 반지름의 길이가 5인 원 위의 점이다.

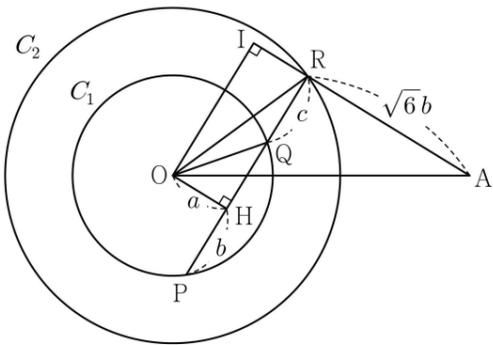


삼각형 PQF는 직각삼각형이므로

$6^2 + \overline{PF}^2 = 10^2$
 $\overline{PF} = 8$
 $\overline{PF} + \overline{PF}' = 2a$, $\overline{QF} + \overline{QF}' = 2a$ 이므로
 $\overline{PF} + \overline{PF}' + \overline{QF} + \overline{QF}' = \overline{PF} + \overline{PQ} + \overline{QF} = 24 = 4a$
 $a = 6$
 $\overline{PF} + \overline{PF}' = 12$ 이므로 $\overline{PF}' = 4$
 삼각형 $PF'F$ 는 직각삼각형이므로
 $4^2 + 8^2 = \overline{FF}'^2$
 $\overline{FF}' = 4\sqrt{5}$ 이므로 $c = 2\sqrt{5}$
 $c^2 = a^2 - b^2$ 이므로 $b^2 = 16$, $b = 4$
 따라서 이 타원의 단축의 길이는 8

29. [출제의도] 평면벡터의 내적을 활용하여
문제 해결하기

조건 (가)에 의하여 세 점 P, Q, R는 한 직선 위에 있고, 조건 (나)에 의하여 직선 AR와 직선 PQ는 수직이므로 $\overline{AR} \perp \overline{PR}$ 이다. 점 O에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하자.



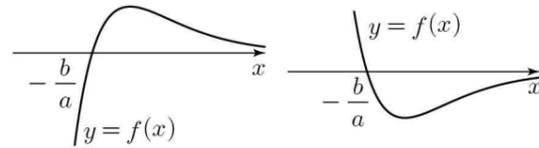
$\overline{OH} = a$, $\overline{HP} = \overline{HQ} = b$, $\overline{QR} = c$ 라 하면
 $\overline{AR} = \sqrt{6}b$
 삼각형 OHQ는 직각삼각형이므로
 $a^2 + b^2 = 5$ ㉠
 삼각형 OHR는 직각삼각형이므로
 $a^2 + (b+c)^2 = 14$ ㉡
 점 O에서 선분 AR의 연장선에 내린 수선의 발을 I라 하면
 $\overline{OI} = \overline{HR} = b+c$, $\overline{IA} = a + \sqrt{6}b$ 이므로
 삼각형 AIO에서
 $(a + \sqrt{6}b)^2 + (b+c)^2 = 44$ ㉢
 ㉠과 ㉢에서
 $2\sqrt{6}ab + 6b^2 = 30$ ㉣
 ㉠과 ㉣에서
 $6a^2 - 2\sqrt{6}ab = 0$
 $a = 0$ 또는 $a = \frac{\sqrt{6}}{3}b$
 세 점 O, P, Q가 한 직선 위에 있지 않으므로
 $a \neq 0$ 이고 $a = \frac{\sqrt{6}}{3}b$
 $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$
 $\overline{PQ} = 2\sqrt{3}$, $\overline{AR} = 3\sqrt{2}$ 이고 원 C_1 위의 점 S에 대하여
 $\overline{AR} \cdot \overline{AS} = \overline{AR} \cdot (\overline{AO} + \overline{OS})$
 $= \overline{AR} \cdot \overline{AO} + \overline{AR} \cdot \overline{OS}$
 $\overline{AR} \cdot \overline{AO} = |\overline{AR}| |\overline{AO}| = 3\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 24$
 \overline{AR} 와 \overline{OS} 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하자.
 $\overline{AR} \cdot \overline{OS} = |\overline{AR}| |\overline{OS}| \cos\theta$

$\overline{AR} \cdot \overline{OS} = 3\sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \cos\theta$ 이므로
 $\overline{AR} \cdot \overline{OS}$ 는 $\cos\theta = 1$ 일 때 최댓값을 갖고
 $\cos\theta = -1$ 일 때 최솟값을 가지므로
 $-3\sqrt{10} \leq \overline{AR} \cdot \overline{OS} \leq 3\sqrt{10}$
 $24 - 3\sqrt{10} \leq \overline{AR} \cdot \overline{AS} \leq 24 + 3\sqrt{10}$
 $M = 24 + 3\sqrt{10}$, $m = 24 - 3\sqrt{10}$
 $Mm = (24 + 3\sqrt{10})(24 - 3\sqrt{10}) = 486$

30. [출제의도] 정적분으로 나타내어진 함수
추론하기

함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.

- (i) $a > 0$ (ii) $a < 0$



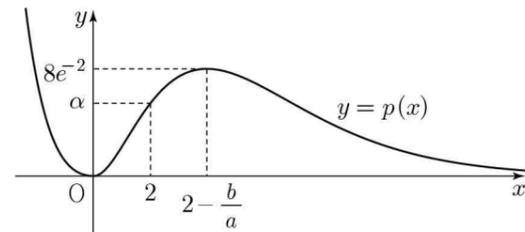
$g(x) = \int_0^x f(t)dt$ 에서 $g(0) = 0$, $g'(x) = f(x)$

조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$ 는 $x = -\frac{b}{a}$ 에서
극댓값 α 를 가지므로 $a < 0$ 이고 $b > 0$ 이다.
 $g(x) - k \geq xf(x)$ 에서 $g(x) - xf(x) \geq k$ 이므로
 $p(x) = g(x) - xf(x)$ 라 하면
 $p'(x) = g'(x) - f(x) - xf'(x) = -xf'(x)$

$f'(x) = -\frac{1}{2}a\left(x - 2 + \frac{b}{a}\right)e^{-\frac{x}{2}}$

$p'(x) = \frac{1}{2}ax\left(x - 2 + \frac{b}{a}\right)e^{-\frac{x}{2}}$

조건 (가), (나)를 만족시키는 함수 $p(x)$ 의
그래프의 개형은 다음과 같다.



$g\left(-\frac{b}{a}\right) = \alpha$, $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ 에 의하여

$p\left(-\frac{b}{a}\right) = g\left(-\frac{b}{a}\right) - \left(-\frac{b}{a}\right)f\left(-\frac{b}{a}\right) = \alpha$

$2 = -\frac{b}{a}$

$p(x) = g(x) - xf(x) \geq k$ 에서 양수 x 의 범위에서
함수 $p(x)$ 의 최댓값은 $h(k)$ 의 값이 존재하는
 k 의 최댓값이므로 $p(4) = 8e^{-2}$

$g(4) = \int_0^4 a(t-2)e^{-\frac{t}{2}} dt$
 $= \left[a(t-2)\left(-2e^{-\frac{t}{2}}\right) \right]_0^4 - \int_0^4 \left(-2ae^{-\frac{t}{2}}\right) dt$
 $= -4ae^{-2} - 4a - \left[4ae^{-\frac{t}{2}} \right]_0^4$
 $= -4ae^{-2} - 4a - 4ae^{-2} + 4a$
 $= -8ae^{-2}$

$p(4) = g(4) - 4f(4)$
 $= -8ae^{-2} - 4 \times 2ae^{-2}$
 $= -16ae^{-2}$

$-16ae^{-2} = 8e^{-2}$ 이므로 $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$

따라서 $100(a^2 + b^2) = 125$