

2019년 국가직 7급 자동제어 가책형 해설

01. ④	02. ③	03. ①	04. ②	05. ④	06. ④	07. ②	08. ④	09. ③	10. ③
11. ④	12. ②	13. ①	14. ②	15. ①	16. ③	17. ①	18. ①	19. ④	20. ②

1. 【정답】 ④

$$f(t) = t - (t-1)u(t-1)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} e^{-s}$$

2. 【정답】 ③

- ① 최대 오버슈트(maximum overshoot) $e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$ 이므로 감쇠비(damping ratio)를 증가시키면 최대 오버슈트(maximum overshoot)는 감소한다.
- ② 상승시간(rise time)은 감쇠비(damping ratio)에 비례하고 비감쇠 고유진동주파수(undamped natural frequency)를 반비례하므로 감쇠비(damping ratio)를 고정하고 비감쇠 고유진동주파수(undamped natural frequency)를 증가시키면 상승시간(rise time)은 감소한다.
- ③ 정착시간(settling time)은 감쇠비(damping ratio)와 비감쇠 고유진동주파수(undamped natural frequency)에 반비례하므로 감쇠비(damping ratio)를 고정하고 비감쇠 고유진동주파수(undamped natural frequency)를 증가시키면 정착시간(settling time)은 감소한다.
- ④ s평면의 좌반평면(left half plane)에 복소극은 부족감쇠(undamped) 응답을 일으킨다.

3. 【정답】 ①

$$\dot{x}_1 = \dot{x} = x_2$$

$$m\ddot{x} = F - kx - c\dot{x}, \quad m\dot{x}_2 = F - kx_1 - cx_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{F}{m}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F$$

4. 【정답】 ②

$$X(s) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -13 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)} [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} U(s) = \frac{U(s)}{(s+1)(s+3)}$$

단위임펄스 응답이므로 $U(s) = 1$

$$Y(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} \right), \quad y(t) = \frac{1}{2} (e^{-t} - e^{-3t})$$

5. 【정답】 ④

④ s평면의 우반평면(right half plane)에 영점이 추가되면 단위계단 입력에 대하여 언더슈트(undershoot) 현상을 일으킨다.

6. 【정답】 ④

① $L(s) = \frac{K}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$, $(-1, 0)$ 을 둘러싸지 않으므로 안정하다.

② $L(s) = \frac{K}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$, $(-1, 0)$ 을 둘러싸지 않으므로 안정하다.

③ $\omega: +0 \rightarrow +\infty$ 의 주어진 나이퀴스트 선도로 볼 때 루프 전달함수의 형태가

$$L(s) = \frac{K(1+T_2s)}{s^2(1+T_1s)} \quad (T_1 < T_2) \text{임을 알 수 있다. 이때 전체 나이퀴스트 선도를 그려보}$$

기 위해 우반평면을 사상하면

1. $\omega: +\infty \rightarrow -\infty$ 일 때

$$L(Re^{j\theta}) = \frac{K(1+T_2Re^{j\theta})}{(Re^{j\theta})(1+T_1Re^{j\theta})} = \frac{KT_2}{T_1Re^{j\theta}} = 0 \angle -\theta \quad (R = \infty \text{이므로})$$

$$-\theta: -90^\circ \rightarrow 90^\circ$$

2. $\omega: -\infty \rightarrow -0$ 일 때

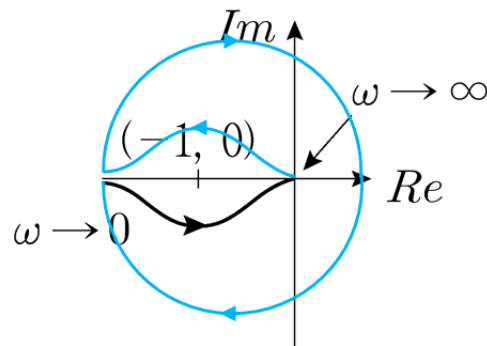
이 경우는 $+0 \rightarrow +\infty$ 일 때와 실수축 대칭이다.

3. $\omega: -0 \rightarrow +0$ 일 때

$$L(\varepsilon e^{j\theta}) = \frac{K(1+T_2\varepsilon e^{j\theta})}{(\varepsilon e^{j\theta})(1+T_1\varepsilon e^{j\theta})} = \frac{K}{\varepsilon e^{j\theta}} = \infty \angle -\theta \quad (\varepsilon \approx 0 \text{이므로})$$

$$-\theta: 90^\circ \rightarrow -90^\circ$$

전체 나이퀴스트 선도를 그리면 다음과 같다.



따라서 $(-1, 0)$ 을 둘러싸지 않으므로 안정하다.

※ 참고 : $T_1 > T_2$ 이면 $(-1, 0)$ 을 둘러싸므로 불안정하다.

④ $\omega: +0 \rightarrow +\infty$ 의 주어진 나이퀴스트 선도로 볼 때 루프 전달함수의 형태가

$$L(s) = \frac{K(1+T_1s)(1+T_2s)}{s^3} \text{임을 알 수 있다. 이때 전체 나이퀴스트 선도를 그려보기}$$

위해 우반평면을 사상하면

1. $\omega: +\infty \rightarrow -\infty$ 일 때

$$L(Re^{j\theta}) = \frac{K(1+T_1Re^{j\theta})(1+T_2Re^{j\theta})}{(Re^{j\theta})^3} = \frac{KT_1T_2}{Re^{j\theta}} = 0 \angle -\theta \quad (R = \infty \text{이므로})$$

$$-\theta: -90^\circ \rightarrow 90^\circ$$

2. $\omega: -\infty \rightarrow -0$ 일 때

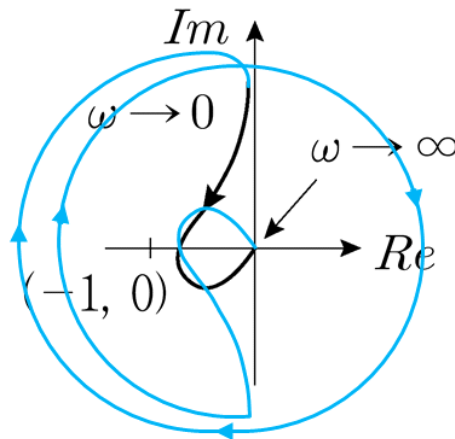
이 경우는 $+0 \rightarrow +\infty$ 일 때와 실수축 대칭이다.

3. $\omega: -0 \rightarrow +0$ 일 때

$$L(\varepsilon e^{j\theta}) = \frac{K(1+T_1\varepsilon e^{j\theta})(1+T_2\varepsilon e^{j\theta})}{(\varepsilon e^{j\theta})^3} = \frac{K}{\varepsilon^3 e^{j3\theta}} = \infty \angle -3\theta \quad (\varepsilon \approx 0 \text{이므로})$$

$$-3\theta: 270^\circ \rightarrow -270^\circ$$

전체 나이퀴스트 선도를 그리면 다음과 같다.



따라서 $(-1, 0)$ 을 둘러싸므로 불안정하다.

7. 【정답】 ②

이득여유(gain margin) $20\log \frac{1}{|L(j\omega)|} = 20\log 2 \text{ dB}$ 이므로 $|L(j\omega)| = \frac{1}{2}$

$$L(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} = \frac{K}{j\omega(-\omega^2+3j\omega+2)}$$

$$\omega^2 = 2, \quad L(j\omega) = -\frac{K}{6}$$

$$\frac{K}{6} = \frac{1}{2}, \quad K = 3$$

8. 【정답】 ④

특성방정식 $s^3 + 3Ks^2 + 2s + 4 + Ks + 5 = 0$

$s^3 + 3Ks^2 + (K+2)s + 9 = 0$

Routh-Hurwitz 판별법을 쓰면

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & K+2 \\ s^2 & 3K & 9 \\ s^1 & \frac{3K(K+2)-9}{3K} & \\ s^0 & 9 & \end{array}$$

극점이 s평면의 우반평면(right half plane)에 두 개 존재하려면 1열의 부호변화가 2번 있어야 하므로 1열의 s^2 행과 s^1 행의 부호가 각각 ‘음수, 양수’ 또는 ‘음수, 음수’ 또는 ‘양수, 음수’인 3가지 경우로 나눌 수 있다. 따라서 안정한 경우인 ‘양수, 양수’ 일 때의 K의 범위를 구한 후 여집합을 구하면 된다.

$3K > 0, \frac{3K(K+2)-9}{3K} > 0$

$K > 0, (K+3)(K-1) > 0$

$K > 1$

따라서 K의 범위로 옳지 않은 것은 ④번 $K > 1$ 이다.

최종 K의 범위는 $K < 1$ 에서 1열을 0으로 만드는 0, -3을 제외한

$0 < K < 1, -3 < K < 0, K < -3$ 이다.

9. 【정답】 ③

정상상태 오차 $e_{ss} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{400(K_P + K_D s)}{s(s+10)}} = \frac{1}{40K_P} = 0.025 = \frac{1}{40}, K_P = 1$

특성방정식 $s(s+10) + 400(K_P + K_D s) = 0, s^2 + (400K_D + 10)s + 400K_P = 0$

$\omega_n = \sqrt{400} = 20, \zeta = \frac{400K_D + 10}{2 \cdot 20} = 1$

$K_D = \frac{30}{400} = \frac{3}{40} = 0.075$

10. 【정답】 ③

$1 + \frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+5)} = 0$

① $s^2 + 2s + 5 = 0$ 에서 $s = -1 \pm j2$ 이므로 극점은 0, -2, $s = -1 \pm j2$ 이다.

따라서 점근선의 교차점 $\sigma_a = \frac{0 + (-2) + (-1 + j2) + (-1 - j2)}{4 - 0} = -1$ 이다,

② 실수축 위의 구간 $-2 \leq s \leq 0$ 의 오른쪽에 $s=0$ 의 극점이 1개(홀수개) 존재하므로 $-2 \leq s \leq 0$ 은 근궤적에 포함된다.

③ 양의 허수부를 갖는 복소극점 $s=-1+j2$ 에서의 출발각을 θ 라 하면

$$-\theta - \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - 90^\circ - \left(180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 180^\circ, \quad \theta = -450^\circ = -90^\circ \text{이다.}$$

④ 점근선이 실수축과 만나는 각도 $\theta_a = \frac{(2k+1)}{4-0} \times 180^\circ$, $k=0, 1, 2, 3$ 이므로

점근선의 개수는 4개이고, 각도 $\theta_a = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$ 이므로 실수축 상의 근궤적이 이탈하여 45° 와 315° 의 점근선을 따라 우반평면으로 이동하게 되므로 근궤적이 허수축과 교차하게 된다.

11. 【정답】 ④

$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{\frac{k}{(Js^2 + bs)}}{1 + \frac{kk_b s}{(Js^2 + bs)(Js^2 + bs)}} = \frac{k}{(Js^2 + bs)(Js^2 + bs) + kk_b s}$$

$$\textcircled{1} \quad I(s) = \frac{Js^2 + bs}{k} \theta(s) \text{이므로} \quad \frac{I(s)}{E_a(s)} = \frac{\frac{Js^2 + bs}{k} \theta(s)}{E_a(s)} = \frac{Js^2 + bs}{(Js^2 + bs)(Js^2 + bs) + kk_b s}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\theta(s)}{I(s)} = \frac{k}{Js^2 + bs}$$

$$\textcircled{3} \quad \omega(t) = \dot{\theta}(t) \text{이므로} \quad \omega(s) = s\theta(s)$$

$$\frac{\omega(s)}{E_a(s)} = \frac{s\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{ks}{(Js^2 + bs)(Js^2 + bs) + kk_b s}$$

$$\textcircled{4} \quad \tau(s) = (Js^2 + bs)\theta(s) \text{이므로}$$

$$\frac{\tau(s)}{E_a(s)} = \frac{(Js^2 + bs)\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{k(Js^2 + bs)}{(Js^2 + bs)(Js^2 + bs) + kk_b s}$$

12. 【정답】 ②

① 입력 $u(t-1)$ 이므로 시간지연(time delay)을 갖는 시스템이다.

② 먼저 문제의 미분방정식이 선형미분방정식이므로 선형(linear) 시스템이다.

$$\text{입력이 } u_1(t) \text{일 때 출력 } \frac{dy_1(t)}{dt} + y_1(t) = u_1(t-1)$$

$$\text{입력 } u_2(t) = u_1(t-t_0) \text{일 때 출력 } \frac{dy_2(t)}{dt} + y_2(t) = u_2(t-1) = u_1(t-t_0-1)$$

$y_1(t)$ 를 t_0 만큼 지연시키면 $\frac{dy_1(t-t_0)}{dt} + y_1(t-t_0) = u_1(t-t_0-1)$

$y_2(t) = y_1(t-t_0)$ 이므로 시불변(time-invariant) 시스템이다.

따라서 선형시불변(linear time-invariant) 시스템이다.

③ 라플라스 변환하면 $sY(s) + Y(s) = U(s)e^{-s}$, $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{e^{-s}}{s+1}$ 이므로 전달함수가 안정하다. 따라서 모든 유한한 크기의 입력에 대하여 출력도 유한하다.

④ 라플라스 변환하면 $sY(s) + Y(s) = U(s)e^{-s}$, $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{e^{-s}}{s+1}$ 이므로 입력과 출력 관계를 전달함수로 나타낼 수 있다.

13. 【정답】 ①

단위계단입력에 대한 정상상태오차 : $e_1(\infty) = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$

단위램프입력에 대한 정상상태오차 : $e_2(\infty) = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} = \frac{1}{\infty} = 0$

단위포물선입력($\frac{1}{2}t^2u_s(t)$)에 대한 정상상태오차 : $e_3(\infty) = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2G(s)} = \frac{1}{5}$

따라서 최종 정상상태오차

$$e(\infty) = 10e_1(\infty) - 2e_2(\infty) + 10e_3(\infty) = 10 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 10 \cdot \frac{1}{5} = 2$$

다른 풀이

시스템의 형이 '2형' 이므로 계단입력과 램프입력에 대한 정상상태오차는 0이므로, 포물선입력 $\frac{10}{2}t^2u(t)$ 에 대한 정상상태오차만 구하면 된다.

이때 정상상태 오차 $e(\infty) = \frac{10}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2G(s)} = \frac{10}{5} = 2$ 이다.

14. 【정답】 ②

가제어성 행렬 : $S = [BAB] = \begin{bmatrix} 1 & -8a \\ a & 1-6a \end{bmatrix}$, $\det S = 1 - 6a + 8a^2 = 0$

$$(2a-1)(4a-1) = 0, \quad a = \frac{1}{2}, \frac{1}{4},$$

가관측성 행렬 : $V = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b-8-6b \end{bmatrix}$, $\det V = -8 - 6b - b^2 = 0$

$$(b+4)(b+2)=0, \quad b=-4, -2$$

따라서 $a+b$ 값이 될 수 있는 것은 $-3.5, -1.5, -3.75, -1.75$ 이다.

15. 【정답】 ①

정상상태 출력 $y(t)$ 의 위상차가 -90° 이므로 $\angle T(j\omega) = -90^\circ$ 이다.

$$\angle T(j\omega) = 0^\circ - \angle (4 - \omega^2 + 2j\omega) = -90^\circ$$

$$\angle (4 - \omega^2 + 2j\omega) = 90^\circ, \quad \omega^2 = 4, \quad \omega = 2$$

$$\text{정상상태 출력의 진폭} : 1 \times |T(j2)| = \left| \frac{4}{j4} \right| = 1$$

$$\text{따라서 출력 } y(t) = \cos(\omega t - 90^\circ) = \sin \omega t = \sin 2t$$

16. 【정답】 ③

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3-K & 2-K \end{bmatrix} \text{라 하면 시스템의 특성방정식은 } \det(sI - A) = 0 \text{이다.}$$

$$\det(sI - A) = s^2 + (K+2)s + K-3 = 0$$

Routh-Hurwitz 판별법을 사용하기 위해 특성방정식을 x 축 양의 방향으로 0.5만큼 평행이동

$$(s-0.5)^2 + (K+2)(s-0.5) + K-3 = 0$$

$$s^2 + (K+1)s + 0.5K - 3.75 = 0$$

특성방정식의 계수가 모두 양수이면 되므로

$$K+1 > 0, \quad 0.5K - 3.75 > 0$$

$$K > -1, \quad K > 7.5$$

공통범위는 $K > 7.5$

$$X(s) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ K-3 & s+2+K \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(s) = \frac{1}{s^2 + (K+2)s + K-3} \begin{bmatrix} s+2+K & 1 \\ 3-K & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + (K+2)s + K-3} [1 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} U(s) = \frac{(1-s)U(s)}{s^2 + (K+2)s + K-3}$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \text{이므로 정상상태 출력 } y_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \frac{1}{K-3} \text{이다.}$$

$$\text{따라서 정상상태오차 } E_{ss} = 1 - \frac{1}{K-3} = \frac{K-4}{K-3}$$

17. 【정답】 ①

$$\omega = 0 \text{일 때 } G(j\omega) = \frac{1}{b} \text{이고 } \omega = \infty \text{일 때 } G(j\omega) = a \text{이다.}$$

나이퀴스트 선도로부터 a 와 $\frac{1}{b}$ 가 2 또는 -1 이 될 수 있다.

문제의 조건으로부터 $a > b$ 이므로 $a = 2, \frac{1}{b} = -1$

$$a + b = 2 - 1 = 1$$

18. 【정답】 ①

정상상태 오차가 0.5에서 0.1로 줄어들었으므로 $C(s)$ 는 지상보상기(lag compensator)이다.

$$C(s) = K \text{ 일 때 정상상태오차 } e_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} C(s)G(s)} = \frac{1}{1 + K \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = 0.5$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{1}{K}$$

$$C(s) = K \frac{s+z}{s+p} = K \frac{s+z}{s+0.01} \text{ 일 때 } \lim_{s \rightarrow 0} C(s) = \frac{Kz}{0.01} \text{ 이므로 정상상태오차}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} C(s)G(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} C(s) \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{1}{1 + \frac{Kz}{0.01} \cdot \frac{1}{K}} = 0.1$$

$$\frac{1}{1 + \frac{z}{0.01}} = \frac{1}{10}, z = 0.09 \text{ 따라서 보상기의 영점은 } -0.09 \text{ 이다.}$$

19. 【정답】 ④

$$Y(s) = aX_1(s) + cX_2(s)$$

$$X_1(s) = (U(s) - aX_1(s) - bX_2(s)) \frac{1}{s}, U(s) = (s+a)X_1(s) + bX_2(s)$$

$$X_2(s) = (U(s) + bX_1(s) - cX_2(s)) \frac{1}{s}, U(s) = -bX_1(s) + (s+c)X_2(s)$$

$$\begin{bmatrix} s+a & b \\ -b & s+c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} U(s), Y(s) = [a \ c] \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+a & b \\ -b & s+c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} U(s)$$

따라서 시스템의 특성방정식 $\det \left(\begin{bmatrix} s+a & b \\ -b & s+c \end{bmatrix} \right) = s^2 + (a+c)s + ac + b^2 = 0$ 이므로 시스템

이 안정하기 위한 a, b, c 의 범위는 $a+c > 0, ac+b^2 > 0$ 이다.

20. 【정답】 ②

$\omega \leq 5$ 일 때 $20 \log |G(j\omega)| = -20$ 이고, 그래프의 점선으로부터 $20 \log |G(j8)| = 0$ 이므로

$$\omega \leq 5 \text{ 에서 } L(s) = \frac{8}{s} \text{ 이다.}$$

$\omega = 5$ 일 때 기울기가 0이 되므로 $1 + \frac{s}{5}$ 이 전달함수의 분자에 들어간다.

$\omega = 50$ 일 때 기울기가 -20 이 되므로 $1 + \frac{s}{50}$ 이 전달함수의 분모에 들어간다.

$\omega = 90$ 일 때 기울기가 0이 되므로 $1 + \frac{s}{90}$ 이 전달함수의 분자에 들어간다.

$$L(s) = \frac{8\left(1 + \frac{s}{5}\right)\left(1 + \frac{s}{90}\right)}{s\left(1 + \frac{s}{50}\right)} \text{이므로}$$

램프오차상수(ramp error constant) $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sL(s) = 8$

참고

보드선도의 기울기 변화에 따라 분모 또는 분자에 추가되는 $1 + Ts$ 의 항은

$\lim_{s \rightarrow 0} (1 + Ts) = 1$ 이므로 굳이 구하지 않아도 된다.