2019년 서울시 지적직 9급 수학 A책형 해설

01. ③	02. ③	03. ②	04. ①	05. ④	06. ①	07. ①	08. ③	09. ③	10. ②
11. ④	12. ②	13. ④	14. ②	15. ①	16. ①	17. ①	18. ④	19. ②	20. ②

1.【정답】 ③

$\alpha = \sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$

$\beta = \sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2} = \sqrt{5}-\sqrt{3}$

$\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = (2\sqrt{5})^3 - 3 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{5}$

$\alpha^3+\beta^3 = 40\sqrt{5} - 12\sqrt{5} = 28\sqrt{5}$

2.【정답】 ③

1) $x < 2$

$x^2-3x+1 = -x+2$

$x^2-2x-1=0$

$x = 1 \pm \sqrt{2}$, $x<2$이므로 $x = 1-\sqrt{2}$

2) $x \geq 2$

$x^2-3x+1 = x-2$

$x^2-4x+3=0$

$x = 1, 3$ $\quad x \geq 2$이므로 $x=3$

모든 실수 x의 합은 $1-\sqrt{2}+3 = 4-\sqrt{2}$

3.【정답】 ②

전개식의 일반항은 ${}_5\mathrm{C}_\mathrm{r}(x^2)^r\left(\frac{k}{x}\right)^{5-r} = {}_5\mathrm{C}_\mathrm{r}k^{5-r}x^{3r-5}$

$3r-5=-2$, $r=1$

${}_5\mathrm{C}_1 \cdot k^4 = 80$, $k^4=16$, $k=2$

4.【정답】 ①

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n} = \frac{1}{2}\int_1^3 (3x^2+1)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^3+x\right]_1^3 = \frac{1}{2}(26+2) = 14$$

5. **【정답】** ④

$z-1=\sqrt{5}\,i$

$z^2-2z+1=-5,\ z^2-2z+6=0$

$z^3-2z^2+6z=0,\ z^4-2z^3+6z^2=0,\ z^4-2z^3=-6z^2$

$z^4-2z^3+8z^2-4z+20=-6z^2+8z^2-4z+20=2z^2-4z+20$

$=2(z^2-2z)+20=2\cdot(-6)+20=8$

6. **【정답】** ①

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

$\frac{1}{2}a^2\le 10,\ -\sqrt{20}\le a\le\sqrt{20}$

$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

$A\cap B^c=A-B=\{5,\ 6\}$

따라서 원소의 개수는 2개다.

7. **【정답】** ①

$f'(x)=2x-4$

접선의 방정식 : $y-(a^2-4a+8)=(2a-4)(x-a)$

$y=(2a-4)x-a^2-8$

$P(a)=-a^2-8$

따라서 자취의 길이는 $|P(5)-P(1)|=|-33+9|=24$

8. **【정답】** ③

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)+h-2}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}f'(1)+\frac{1}{2}$$

$f'(x)=10x^9,\ f'(1)=10$

$\frac{10}{2}+\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$

9. **【정답】** ③

좌극한 $\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}\lim_{n\to\infty}\frac{3x^{2n+2}+a}{x^{2n}+2}=\frac{a}{2}$

우극한 $\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}\lim_{n\to\infty}\frac{3x^{2n+2}+a}{x^{2n}+2}=\lim_{x\to 1+}\lim_{n\to\infty}\frac{3x^2+\frac{a}{x^{2n}}}{1+\frac{2}{x^{2n}}}=3$

$\frac{a}{2}=3,\ a=6$

10. **【정답】** ②

$n(A\cap B)=0$일 때 순서쌍의 개수 $2\times \mathrm{S}(4,2)=2\times 7=14$

$n(A\cap B)=1$일 때 순서쌍의 개수 $2\times 2\times 2\times 2=16$

$n(A\cap B)=2$일 때 순서쌍의 개수 $2\times 2=4$

순서쌍의 개수는 $14+16+4=34$개다.

11. **【정답】** ④

$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$

$a_n+1=2\cdot 2^{n-1},\ a_n=2^n-1$

$\sum_{k=1}^{100}(2^n-1)=\frac{2(2^{100}-1)}{2-1}-100=2^{101}-102$

12. **【정답】** ②

$a_1a_2\cdots a_n=2^{n^2}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 a_1+\log_2 a_2+\ \cdots\ +\log_2 a_n=n^2$

$b_n=\log_2 a_n$이라 하면 $S_n=n^2$

$b_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$

$$\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{\log_2 a_n\times\log_2 a_{n+1}}=\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ \cdots\ +\frac{1}{199}-\frac{1}{201}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{200}{201}=\frac{100}{201}$$

$p+q=201+100=301$

13. **【정답】** ④

이차방정식 $x^2-2kx+k+2=0$의 근 중 적어도 하나가 절댓값 1이하가 되도록 하는 100 이하의 자연수 k의 개수는 전체 경우의 수에서 허근을 갖거나 두 근의 절댓값이 모두 1보다 큰 경우를 빼주면 된다.

1) 허근을 갖는 경우

판별식 : $\frac{D}{4}=k^2-k-2<0,\ (k-2)(k+1)<0,\ -1<k<2$

따라서 자연수 k는 1이다,

2) 두 근의 절댓값이 모두 1보다 큰 경우

먼저 k가 100이하의 자연수이므로 두 근의 합 $2k>0$, 두 근의 곱 $k+2>0$ 모두 양수이

다. 따라서 두 근은 양수이다.

판별식 : $\dfrac{D}{4}=k^2-k-2\geq 0,\ (k-2)(k+1)\geq 0,\ k\leq -1,\ k\geq 2$

대칭축 : $k>1$

$f(1)=1-2k+k+2=-k+3>0,\ k<3$

공통범위는 $2\leq k<3$이므로 자연수 k는 2이다.

따라서 100이하의 자연수 k의 개수는 허근을 갖는 1과 두 근의 절댓값이 모두 1보다 큰 2를 제외한 98개다.

14.【정답】 ②

$x<1$일 때 $f'(x)=x-x+1=1$

$x\geq 1$일 때 $f'(x)=x+x-1=2x-1$

$x<1$일 때 $f(x)=x+C,\ f(0)=3$이므로 $f(x)=x+3$

$x\geq 1$일 때 $f(x)=x^2-x+C,\ f(1)=4$이므로 $f(1)=1-1+C=4$에서 $C=4$

$f(-1)+f(2)=-1+3+2^2-2+4=8$

15.【정답】 ①

$l_1:\ x-2=y-1=-(z-2)$, 따라서 방향벡터 $(1,1,-1)$

$l_2:\ x-3=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{2}$, 따라서 방향벡터 $(1,2,2)$

내적의 관계로부터 $\cos\theta=\dfrac{1+2-2}{\sqrt{3}\cdot 3}=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

16.【정답】 ①

$y'=4x^3+2x$

접선의 방정식 $y-a^4-a^2-2=(4a^3+2a)(x-a)$

원점을 지나므로 $-a^4-a^2-2=-4a^4-2a^2$

$3a^4+a^2-2=0$

$(3a^2-2)(a^2+1)=0,\ a^2=\dfrac{2}{3}$

따라서 접점의 y좌표는 $a^4+a^2+2=\dfrac{4}{9}+\dfrac{2}{3}+2=\dfrac{28}{9}$

17.【정답】 ①

$f(x)=10^{3\log(2+\sin x)}+\cos^2 x$

$f(x)=(2+\sin x)^3+\cos^2 x$

$\sin x=t$로 치환하면 $f(t)=(2+t)^3+1-t^2$

$f(t)=8+12t+6t^2+t^3+1-t^2=t^3+5t^2+12t+9$

$f'(t)=3t^2+10t+12>0$, $-1\le t\le 1$이므로 최댓값은 $f(1)=27$이다.

18. 【정답】 ④

$g'(x)=f(x)$, $g'(2)=f(2)=0$, $f(0)=0$이므로 $f(x)=ax(x-2)$로 놓을 수 있다.

$$g(6)=\int_0^6 f(t)dt=a\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^6=a(72-36)=36a=108$$

$a=3$

$f(x)=3x(x-2)$, $f(4)=24$

19. 【정답】 ②

$E(2X+3)=6$, $2E(X)+3=6$, $E(X)=\frac{3}{2}$

$V(2X+3)=4V(X)=2$, $V(X)=\frac{1}{2}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=E(X^2)-\frac{9}{4}=\frac{1}{2}$, $E(X^2)=\frac{11}{4}$

$P(X=1)=a$, $P(X=2)=b$라 하면

$E(X)=a+2b=\frac{3}{2}$

$E(X^2)=a+4b=\frac{11}{4}$

$2b=\frac{5}{4}$, $b=\frac{5}{8}$ $p+q=8+5=13$

20. 【정답】 ②

제2코사인법칙에 의해 $\overline{BC}^2=1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cdot\cos30^\circ=5-2\sqrt{3}$

각의 이등분선의 관계로부터 $\overline{CD}:\overline{DB}=2:1$이므로 $\overline{BD}=k$로 놓으면 $\overline{BC}=3k$이다.

$(3k)^2=5-2\sqrt{3}$

$\overline{BD}^2=k^2=\frac{1}{9}(5-2\sqrt{3})$