

수 학

문 1. 다항식 $f(x) = x^3 + ax^2 - 5x + a$ 를 $x - 2$ 로 나눈 나머지가 8일 때, 상수 a 의 값은?

① 1
② 2
③ 3
④ 4

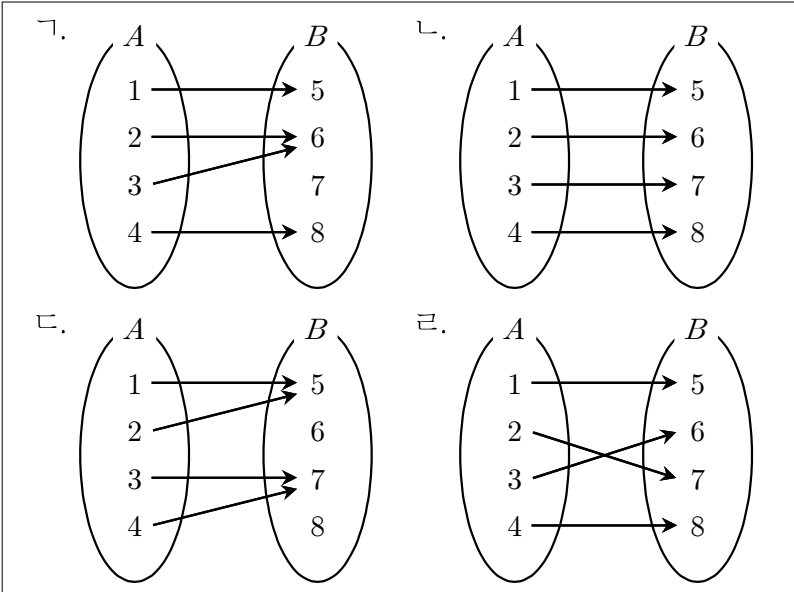
sol) $f(2) = 8$ 이므로, $f(2) = 8 + 4a - 10 + a = 5a - 2 = 8$.
 $\therefore a = 2$.

문 2. 두 양수 a, b 에 대하여 $\log_2 ab = 6$, $\log_2 \frac{a}{b} = 2$ 일 때, $a - b$ 의 값은?

① 16
② 12
③ 8
④ 4

sol) $ab = 2^6$, $\frac{a}{b} = 2^2$. 두 식을 연립하면 $a = 16$, $b = 4$.
 $\therefore a - b = 16 - 4 = 12$.

문 3. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$ 에 대하여, A 에서 B 로의 함수 중 역함수가 존재하는 것만을 모두 고르면?



① 가, 나
② 가, 다
③ 나, 다
④ 나, 라

sol) 공역 B 의 개별 원소에 화살표가 유일하게 한 개인 것(나, 라)만 역함수를 가진다.

문 4. $x^2 - 4x + 1 = 0$ 일 때, $5x^2 + \frac{5}{x^2}$ 의 값은?

① 85
② 80
③ 75
④ 70

sol) $x^2 - 4x + 1 = 0$ 에서 양변을 x 로 나누면 $x + \frac{1}{x} = 4$ 를 얻을 수 있다. $5x^2 + \frac{5}{x^2} = 5\left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right\} = 5(16 - 2) = 70$.

문 5. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = \begin{cases} -3x & (x \text{는 유리수}) \\ x^2 & (x \text{는 무리수}) \end{cases}$ 에 대하여 $(f \circ f)(\sqrt{5})$ 의 값은?

① -15
② -5
③ 5
④ 15

sol) $(f \circ f)(\sqrt{5}) = f(f(\sqrt{5})) = f(5) = -15$.

문 6. 20 이하의 자연수 n 에 대하여, $\left\{\frac{2(1+i)}{1-i}\right\}^n = -2^n i$ 를 만족시키는 모든 n 의 값의 합은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 45
② 50
③ 55
④ 60

sol) $\frac{1+i}{1-i} = i$ 이므로 $\left\{\frac{2(1+i)}{1-i}\right\}^n = 2^n(i)^n$. $(i)^n = -i$ 가 되는 n 은 4로 나누었을 때 나머지가 3인 수이므로, n 은 3, 7, 11, 15, 19이다. 이들의 합은 $11 \times 5 = 55$ 이다.

문 7. 다항함수 $f(x)$ 가 $f(1) = -3$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h} = 8$ 을 만족시킨다. 함수 $g(x) = (x^2 + 1)f(x)$ 에 대하여, $g'(1)$ 의 값은?

① 2
② 1
③ -1
④ -2

sol) 극한 식 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h} \cdot 2 = 2f'(1) = 8$. $f'(1) = 4$. 곱의 미분법에 의해 $g'(x) = (2x)f(x) + (x^2 + 1)f'(x)$ 이므로 $g'(1) = 2f(1) + 2f'(1) = 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 = 2$.

문 8. 파란 공 4개와 노란 공 6개 중에서 임의로 공 3개를 동시에 뽑을 때, 뽑힌 3개의 공 중에 노란 공이 한 개 이상일 확률은?

- ① $\frac{17}{30}$
- ② $\frac{19}{30}$
- ③ $\frac{23}{30}$
- ④ $\frac{29}{30}$

sol) 노란 공이 한 개 이상일 사건은 전체에서 파란 공만 세 개 뽑히는 사건을 빼주면 된다.

따라서 $p = 1 - \frac{{}_4C_3}{{}_{10}C_3} = 1 - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8} = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$.

문 9. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^n k a_k = \{n(n+1)\}^2$ 이 성립할 때,

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12}{n^3} \sum_{k=1}^n a_k$ 의 값은?
- ① 8
 - ② 16
 - ③ 24
 - ④ 32

sol) $na_n = \{n(n+1)\}^2 - \{(n-1)n\}^2 = 4n^3 \therefore a_n = 4n^2$.

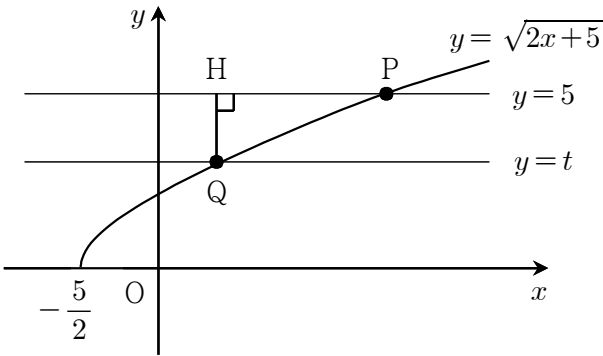
$\sum_{k=1}^n 4k^2 = 4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 이므로 주어진 극한식의 분자와 분

모 모두 n^3 이 최고차항이므로 계수만 비교하면 극한값을 구할 수

있다. 따라서 $\frac{\left(12 \cdot \frac{4}{6} \cdot 2\right)n^3}{n^3} = 16$.

문 10. 곡선 $y = \sqrt{2x+5}$ 와 두 직선 $y=5, y=t(0 < t < 5)$ 의 교점을 각각 P, Q라 하자. 점 Q에서 직선 $y=5$ 에 내린 수선의 발을

H라 할 때, $\lim_{t \rightarrow 5-} \frac{\overline{PQ}}{\overline{QH}}$ 의 값은?



- ① $\sqrt{26}$
- ② $2\sqrt{6}$
- ③ $\sqrt{22}$
- ④ $2\sqrt{5}$

sol) 점 P는 $P(10, 5)$ 이고 점 Q는 $\left(\frac{t^2-5}{2}, t\right)$ 이다.

$\overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{25-t^2}{2}\right)^2 + (5-t)^2} = \sqrt{(5-t)^2 \left\{\left(\frac{5+t}{2}\right)^2 + 1\right\}}$ 이고
 $\overline{QH} = 5-t$ 이므로

$\lim_{t \rightarrow 5-} \frac{\overline{PQ}}{\overline{QH}} = \frac{(5-t) \sqrt{\left(\frac{5+t}{2}\right)^2 + 1}}{5-t} = \sqrt{5^2 + 1} = \sqrt{26}$.

문 11. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여
집합 $A - (B \cap C)$ 와 같은 것은?

- ① $(A-B) \cap (A-C)$
- ② $(A-B) \cup (A-C)$
- ③ $(A-B) \cap (B-C)$
- ④ $(A-B) \cup (B-C)$

sol) $A - (B \cap C) = A \cap \{(B \cap C)\}^c = A \cap (B^c \cup C^c)$
 $= (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) = (A-B) \cup (A-C)$.

문 12. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 의 그래프와 직선 $y = 2x + 3$ 의 두 교점의 x 좌표가 각각 1, 5일 때, $a + 2b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수)

- ① 12
- ② 16
- ③ 20
- ④ 24

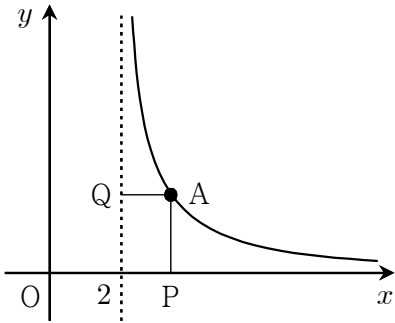
sol) 이차방정식 $x^2 + ax + b - (2x + 3) = x^2 - (2-a)x + (b-3) = 0$
의 두 근이 1과 5라고 할 수 있다. 근과 계수와의 관계에 따라
 $1 + 5 = 2 - a \Rightarrow a = -4$. $1 \times 5 = b - 3 \Rightarrow b = 8$.
 $a + 2b = -4 + 16 = 12$.

- 문 13. 수직선 위의 두 점 A(-1), B(5)에 대하여, 선분 AB를 2:1로 내분하는 점을 P(x_1), 3:2로 외분하는 점을 Q(x_2), 선분 AB의 중점을 M(x_3)이라고 할 때, x_1, x_2, x_3 의 관계로 옳은 것은?
- ① $x_1 < x_2 < x_3$
 - ② $x_1 < x_3 < x_2$
 - ③ $x_3 < x_1 < x_2$
 - ④ $x_3 < x_2 < x_1$

sol) (이건 제가 빨리 풀 때 사용하는 방법입니다.)

$\overline{AB}=6$ 이므로 내분점 P는 $x_1=-1+6\times\frac{2}{2+1}=3$
3:2에서 $3>2$ 이므로 점 B는 $\overline{AQ}$ 를 1:2로 내분한다. 따라서 외분점 Q는 $x_2=5+2\times\overline{AB}=17$.
 $\overline{AB}$ 의 중점 M은 $x_3=\frac{5+(-1)}{2}=2$.
따라서 $x_3 < x_1 < x_2$.

- 문 14. 유리함수 $y=\frac{4}{x-2}$ ($x>2$)의 그래프 위의 점 A에서 두 점근선에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{AP}+\overline{AQ}$ 의 최솟값은?



- ① 6
 - ② 5
 - ③ 4
 - ④ 3
- sol) 점 A의 x좌표를 t라 두면($t>2$), $\overline{AQ}=t-2$ 이고
 $\overline{AP}=y=\frac{4}{t-2}$ 이다. 따라서
 $\overline{AP}+\overline{AQ}=\frac{4}{t-2}+(t-2)\geq 2\sqrt{\left(\frac{4}{t-2}\right)\times(t-2)}=4$.
- 문 15. 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근의 합은 8이고, 곱은 3일 때, 이차방정식 $f(2x+1)=0$ 의 두 근의 곱은?
- ① -3
 - ② -1
 - ③ 1
 - ④ 3
- sol) $f(x)=a(x^2-8x+3)=0$ 으로 둘 수 있다(단, $a\neq 0$ 인 상수).
 $f(2x+1)=a\{(2x+1)^2-8(2x+1)+3\}=a(4x^2-12x-4)=0$
에서 두 근의 곱은 $\frac{-4a}{4a}=-1$.

- 문 16. 등비수열 2, $a_1, a_2, a_3, a_4, 36$ 에 대하여
- $$a_1\times a_2\times a_3\times a_4=2^m\times 3^n$$
- 을 만족시키는 자연수 m과 n의 합 $m+n$ 의 값은?
- ① 6
 - ② 8
 - ③ 10
 - ④ 12

sol) 주어진 수열의 공비를 r이라 하면 $36=2\times r^5$ 이므로 $r^5=18$ 이다.
 $a_1\times a_2\times a_3\times a_4=2r\times 2r^2\times 2r^3\times 2r^4=2^4r^{1+2+3+4}$
 $=2^4r^{10}=2^4\times 18^2=2^6\times 3^4$
 $\therefore m+n=6+4=10$.

- 문 17. 함수 $f(x)=x^3+ax^2-(1+2a)x+a$ 에 대하여 $y=f(x)$ 의 그래프는 실수 a의 값에 관계없이 항상 점 P를 지난다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식을 $y=mx+n$ 이라 할 때, $m-n$ 의 값은? (단, m, n은 상수)
- ① 8
 - ② 4
 - ③ -4
 - ④ -8

sol) $f(x)$ 를 a에 관한 식으로 표현하면
 $a(x^2-2x+1)+(x^3-1-f(x))=0$.
괄호 안의 값이 각각 0이 되려면 $x=1, f(1)=0$ 이어야 한다.
 $f'(x)=3x^2+2ax-(1+2a)$ 이고 $f'(1)=3+2a-1-2a=2$.
따라서 접선의 방정식은 $y=2(x-1)=2x-2$.
 $\therefore m-n=2-(-2)=4$.

- 문 18. 두 실수 x, y에 대하여
- $$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y-5)^2}$$
- 의 최솟값은?
- ① $\sqrt{17}$
 - ② $\sqrt{15}$
 - ③ $\sqrt{13}$
 - ④ $\sqrt{11}$
- sol) 좌표평면 위의 임의의 점을 (x,y)라 두면 위의 식은 (x,y)과 (1,1)을 연결한 선분과 (x,y)과 (0,5)를 연결한 선분의 합이다. 식의 값이 최소가 되려면 (0,5)가 y축 위의 점이므로 (1,1)을 y축에 대칭이동한 점 (-1,1)과 (0,5)을 연결한 선분의 길이가 위의 식의 값을 최소로 한다. 따라서 $\sqrt{\{0-(-1)\}^2+(5-1)^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$

문 19. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x)=4x^3+x\int_0^1f(t)dt$$

를 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값은?

- ① 3
- ② 4
- ③ 5
- ④ 6

sol) $A=\int_0^1f(t)dt$ (A 는 상수)라 두자.

$$A=\int_0^1f(t)dt=\int_0^1(4t^3+At)dt=\left[t^4+\frac{A}{2}t^2\right]_0^1=1+\frac{A}{2}$$

따라서 $A=2$. $\therefore f(x)=4x^3+2x$. $f(1)=4+2=6$.

문 20. 한 개의 주사위를 18번 던질 때, 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X 라 하자. X^2 의 평균은?

- ① 148
- ② 144
- ③ 140
- ④ 136

sol) 6의 약수는 1, 2, 3, 6이므로 6의 약수의 눈이 나올 확률은

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ 이다. 그리고 위의 시행은 이항분포를 따르며 평균은

$$18\times\frac{2}{3}=12\text{이고 분산은 }18\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=4\text{이다.}$$

어떤 확률분포의 분산 $Var(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$ 이므로

$$E(X^2)=Var(X)+\{E(X)\}^2=4+12^2=4+144=148.$$