번호	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
정답	③	④	②	①	②	④	①	④	③	③	③	②	①	②	③	②	④	①	③	②

해설

1. 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}$ …… ①

양변에 $x=-1$을 대입하면

$4^5=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_9+a_{10}$ …… ②

①+②$=2a_0+2a_2+\cdots+2a_{10}=1024$

$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=512$

답: ③

2. $P(x)=(x^2-3x-18)Q(x)+2x-3$

$\cdots \quad =(x-6)(x+3)Q(x)+2x-3$

$P(3x)=(3x-6)(3x+3)Q(3x)+6x-3$

$=3(x-2)(3x+3)Q(3x)+6(x-2)+9$

$=3(x-2)\{(3x+3)Q(x)+1\}+9$

따라서 $P(3x)$를 $x-2$로 나누었을 때, 나머지는 9이다.

답: ④

3. $x(1+2i)-(y+5)i=3$

$(2x-y-5)i+(x-3)=0$

$2x-y-5=0,\ x=3$

$\therefore x=3,\ y=1 \quad x+y=4$

답: ②

4. $k^2+(6+2x)k+x^2+2ax-9b=0$

x에 대해 내림차순으로 정리하면

$x^2+(2k+2a)x+k^2+6k-9b=0$

중근을 가지므로

$\frac{D}{4}(\text{판별식})=(k+a)^2-(k^2+6k-9b)=0$

정리하면 $(2a-6)k+a^2+9b=0$

k의 값에 관계 없이 항상 중근을 갖기 위해선

$2a-6=0, \quad a^2+9b=0$

$\Rightarrow a=3,\ b=-1 \quad \therefore a+b=2$

답: ①

5. $x^2+y^2+4x-6y+9=0$

$\Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=4$

원 $(x+2)^2+(y-3)^2=4$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은 $(x+2-a)^2+(y-3-b)^2=4$

이는 $x^2+y^2=c$와 같으므로

$\therefore a=2,\ b=-3,\ c=4 \qquad a+b+c=3$

답: ②

6. 두 직선 $-x+2y-3=0$, $2x-y+5=0$과 점 $(k,1)$과의 거리를 구하면

$\dfrac{|-k+2-3|}{\sqrt{(-1)^2+2^2}}=\dfrac{|2k-1+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$

$\Rightarrow \dfrac{|k+1|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|2k+4|}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow k+1=2k+4$ 혹은 $k+1=-2k-4$

$k=-3,\ k=-\dfrac{5}{3}$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $-3+(-\dfrac{5}{3})=-\dfrac{14}{3}$이다.

답: ④

7. 원의 중점과 직선 사이의 거리를 구하면

$(x+1)^2+(y+2)^2=18 \Rightarrow$ 원의 중심 $(-1,\ -2)$

직선: $-x-y+5=0$

$\Rightarrow \dfrac{|-(-1)-(-2)+5|}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

이때, 원 위의 점에서 직선에 이르는 거리의 최솟값은 원의 중점과 직선 사이의 거리에서 원의 반지름의 길이를 뺀 값과 같다.

따라서 $4\sqrt{2}-3\sqrt{2}$(원의반지름) $=\ \sqrt{2}\quad =k$

$\therefore k^2=2$

답: ①

8. $U=\{-3,\ -2,\ -1,0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

$p: x^3+2x^2-x-2=0$

$\rightarrow (x-1)(x^2+3x+2)=0,\ (x-1)(x+2)(x+1)=0$

$x=1,\ x=-2,\ x=-1$이므로 p의 진리집합 $P=\{-2,-1,\ 1\}$

$q: x^2+2x-3=0 \quad \rightarrow\ (x+3)(x-1)=0$

$x=1,\ x=-3$ 이므로 q의 진리집합 $Q=\{1,-3\}$

따라서 'p이고 $\sim q$'의 집합은 $P\cap Q^c=\{-2,\ -1\}$이고

모든 원소의 합은 -3이다.

답: ④

9. $f^{-1}(3)=0\quad\cdots\quad f(0)=3$이고

$f(0)=3a=3\quad,\quad a=1$

$f(x)=x+3$이고 $f(1)=4$ 이므로 $f^{-1}(4)=1$

$(g\circ f^{-1})(4)=g(f^{-1}(4))=g(1)=20-4=16$이므로

$g(1)=b+c=16$

$\therefore a+b+c=1+16=17$

답: ③

(다른풀이) $f^{-1}(3)=0\quad\cdots\quad f(0)=3$이고

$f(0)=3a=3\quad,\quad a=1$

$f(x)=x+3$이고

$(g\circ f^{-1})(3)=g(0)=15-4$이므로

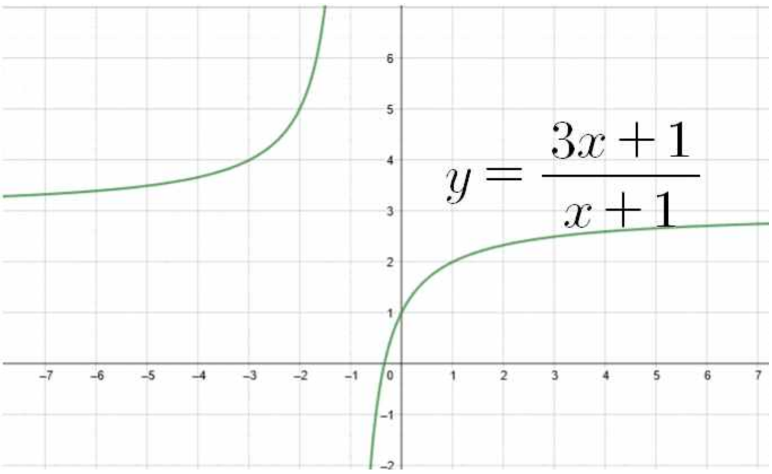
$g(0)=c=11$

$(g\circ f^{-1})(4)=g(1)=20-4$이므로

$g(1)=b+c=16,\quad b=5$

$\therefore a+b+c=1+11+5=17$

10. $y=\dfrac{3x+1}{x+1}\quad\cdots\quad y=3-\dfrac{2}{x+1}$



다음과 같이 그려지므로 구간 $0\le x\le 4$에서 이 함수는 증가하므로,

최솟값: $x=0,\ y=\dfrac{3\times 0+1}{0+1}=1$

최댓값: $x=4,\ y=\frac{3\times4+1}{4+1}=\frac{13}{5}$을 갖는다.

$\therefore\ 1+\frac{13}{5}=\frac{18}{5}$

답: ③

11. $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-(n-1)^2-(n-1)$

$=2n$

$\sum_{n=1}^{12}\frac{13}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{12}\frac{13}{2n(2n+2)}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{12}\frac{13}{n(n+1)}$

$=\frac{13}{4}\sum_{n=1}^{12}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{13}{4}\sum_{n=1}^{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{13}\right)=3$

답: ③

12. $5^x=9$이므로 $5=9^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{2}{x}}$

$15^y=27$이므로 $15=27^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{3}{y}}$

두식의 각변을 나누면 $\frac{1}{3}=3^{\frac{2}{x}-\frac{3}{y}}$ $\therefore\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=-1$

(다른풀이)

$x=\log_5 9,\quad y=\log_{15}27$

$\Rightarrow x=\frac{\log9}{\log5}=\frac{2\log3}{\log5},\quad y=\frac{\log27}{\log15}=\frac{3\log3}{\log3+\log5}$

$\frac{2}{x}-\frac{3}{y}=\frac{\log5}{\log3}-\frac{\log3+\log5}{\log3}=\frac{(-\log3)}{\log3}=-1$

답: ②

13. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_4=\frac{80}{3}$이므로

$a_5=\frac{80}{3}r,\ a_6=\frac{80}{3}r^2$

$a_5+a_6=\frac{80}{3}(r+r^2)=160$

$\Rightarrow r^2+r-6=0,\quad r>0$이므로 $r=2$

답: ①

14. $a_1 \le a_2 = a_3 \le a_4 \le a_5$인 경우의 수는

$a_1 \le a_2 \le a_4 \le a_5$인 경우의 수와 같다. $\cdots\cdots$ ①

한 개의 주사위를 4번 던질 때, p번째 나오는 눈의 수를 $a_p(p=1,2,3,4)$라 할 때, $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4$인 경우의 수는 1~6 중에서 중복을 허락하여 4개 고르는 경우의 수와 같으므로,

${}_6H_4$와 같고, ${}_6H_4 = {}_9C_4 = \dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1} = 126$이다.

이는 ①의 경우와 같으므로 $\therefore 126$

답: ②

15. $A = {}_8C_0 + 7{}_8C_1 + 7^2{}_8C_2 + \cdots + 7^8{}_8C_8 = \sum_{k=0}^{8}\left\{{}_8C_k(7)^k(1)^{8-k}\right\}$

$= (7+1)^8 = 8^8 = 4^{12}$

$\log_4 A = \log_4 4^{12} = 12$

답: ③

16. $E(X) = 20p$이므로

$E(2X+1) = 2\times(20p)+1 = 40p+1 = 9 \qquad \therefore p = \dfrac{1}{5}$

$E(X) = 20\times\dfrac{1}{5} = 4, \quad V(X) = 20\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{5} = \dfrac{16}{5}$

$E(X^2) = (E(X))^2 + V(X) = 16 + \dfrac{16}{5} = \dfrac{96}{5}$

답: ②

17. 부등식의 양변을 n^2으로 나누면

$\dfrac{3n^2-1}{n^2} \le \dfrac{a_n}{n} \le \dfrac{3n^2+2}{n^2}$

각변에 극한을 취하면

$3 \le \lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n} \le 3 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n} = 3$

주어진 식의 분모, 분자를 n으로 나누면

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{a_n}{n}+1+\dfrac{2}{n}}{2+\dfrac{1}{n}} = 2$

(다른풀이)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+n+2}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+n^2+2n}{2n^2+n}$$

$3n^2-1\le na_n\le 3n^2+2$에서

$4n^2+2n-1\le na_n+n^2+2n\le 4n^2+2n+2$

n은 양수이므로

$$\frac{4n^2+2n-1}{2n^2+n}\le\frac{na_n+n^2+2n}{2n^2+n}\le\frac{4n^2+2n+2}{2n^2+n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+2n-1}{2n^2+n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+n^2+2n}{2n^2+n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+2n+2}{2n^2+n}$$

$$2\le\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+n^2+2n}{2n^2+n}\le 2$$

$$\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\frac{na_n+n^2+2n}{2n^2+n}=2$$

답: ④

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^n}{5^n}+\frac{4^n}{5^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$

$$=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}+\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}=\frac{11}{2}$$

답: ①

19. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x^2+3x-1}=1$이므로 $f(x)$는 최고차항이 2이고 이차항의 계수가 2인 이차함수이다.

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-1}\times\frac{f(x)}{x-2}=4,\quad \lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=4$

$f(2)=0$이고, 따라서 함수식을 세우면 $f(x)=2(x-2)(x+a)$

이때, $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2(x-2)(x+a)}{x-2}=2(2+a)=4$이므로

$a=0$이다. $\therefore\ f(x)=2(x-2)x,\quad f(3)=6$

답: ③

20. $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)dt$라 하자 $\ \to\ F(1)=0$

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}\lim_{x\to1}\frac{F(x)}{x-1}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x \to 1}\frac{F(x) - F(1)}{x - 1}$$

이때, $F'(x) = f(x)$이고 $\frac{1}{2}F'(1) = \frac{1}{2}f(1) = \frac{1}{2}(1^2 - 2 - 5) = -3$

답: ②