

2019 경찰 공무원 1차 수학 해설

부족한 풀이가 있을 수도 있지만 가장 빨리 푸는 방법으로 풀어봤습니다.

1. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

각각의 몫으로 나누었을 시 함수값을 구하면

$$f(1) = 1 + a + b + c = 3 \text{ 즉, } a + b + c = 2 \dots (1)$$

$$f(3) = 27 + 9a + 3b + c = 3 \text{ 즉, } 9a + 3b + c = -24 \dots (2)$$

$$f(2) = 8 + 4a + 2b + c = 0 \text{ 즉, } 4a + 2b + c = -8 \dots (3)$$

구해야 하는 함수값은 $f(4) = 64 + 16a + 4b + c = ? \dots (4)$

위의 3개의 식을 통해 $4b+c$ 의 값을 구하려면

$$(2)+(3)-(1) = 12a + 4b + c = -34 \text{ ,, } 4b + c = -12a - 34$$

이것을 (4)번 식의 대입하면 $f(4) = 4a + 30 = ?$ 이 된다.

여기서 우리는 보기를 보면 15~18까지 있고 차이는 3인 것으로 봐서 4의 배수를 30에서 빼면 값은 보기중에 하나밖에 나오지 않으므로 답은 18이 됩니다.

2. $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

$$(2 - w^{19})(2 - \overline{w}^{19}) = ?$$

전개하면 $4 - 2(w^{19} + \overline{w}^{19}) + (w\overline{w})^{19}$

허수는 $x^2 + x + 1$ 에서 나오기 때문에 $w, \overline{w}$ 는 근과 계수와의 관계에 의해서

$$w + \overline{w} = -1, \quad w\overline{w} = 1 \text{ 전개를 해보면 나오지만 } w + \overline{w} = w^{19} + \overline{w}^{19} \text{ 이므로}$$

$$4 - 2(-1) + 1 = 7$$

3. x의 차수 y의 차수 그리고 상수항을 보고 추론하면 답이 금방 나옵니다.

$x^2 - xy + ax - 2y^2 - 8y - 8$ 에서 (x항+y항+상수항)(x항+y항+상수항)의 일차식의 곱의 형태로 나눌 수 있습니다.

$$\text{즉, } (x - 2y - 4)(x + y + 2) = x^2 - xy - 2x - 2y^2 - 8y - 8 \text{ 이므로}$$

$$a = -2$$

4. $(2, \frac{1}{b})$ 을 $\frac{x}{2a} + 3y = 1$ 에 대입

$$\frac{1}{a} + \frac{3}{b} = 1 \text{ 이고 산술기하평균을 이용하면 } \frac{1}{a} + \frac{3}{b} = 1 \geq 2\sqrt{\frac{3}{ab}}$$

여기서 $2\sqrt{\frac{3}{ab}}$ 은 1이 나와야 하므로 $ab = 12$

5. $y = ax + 2a + 3$ 을 정리하면 $y = a(x + 2) + 3$ 이므로 항상 이 직선은 $(-2, 3)$ 을 지나므로

$$(-1, 1) \text{과 } (-2, 3) \text{ 두점의 거리를 구하면 } \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$$

6. $f(x) = x^2 + ax + b$ (1,3)을 지나므로 대입

$$a+b=2 \dots (1)$$

$f(x)$ 의 꼭짓점이 $y=-x-2$ 위에 있으므로

$f(x)$ 를 정리하면 $f(x) = (x + \frac{a}{2})^2 + b - \frac{a^2}{4}$ 이므로

점 $(-\frac{a}{2}, b - \frac{a^2}{4})$ 은 $y=-x-2$ 직선을 지납니다.

$$\text{정리하면 } a^2 + 2a - 4b - 8 = 0 \dots (2)$$

(1)식의 b 를 a 에 대해 정리하면 $b=2-a$ 이고 (2)식에 대입

$$a^2 + 6a - 16 = 0$$

$a=-8$ or 2 꼭짓점이 3사분면에 있으니깐 꼭짓점 방정식을 이용하면 $-\frac{a}{2} < 0$ 이므로

$a > 0$ 이므로 $a=2$ 이다. 그럼 (1)식에 2를 대입하면 $b=0$ 즉 최소값은 $b - \frac{a^2}{4}$ 이므로

답은 -1 이다.

7. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 에서 y 축 대칭 이동을 하면 $x=-x$ 이므로

$$(-x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

y 축 방향으로 1만큼 이동은 $y=y-1$ 을 대입

$$(-x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$$

원점 사이의 거리의 최대값, 최소값은 원의 중심점과 반지름을 알면 된다.

원의 중심점은 $(-1,2)$ 에서 원점까지의 거리는 $\sqrt{5}$ 최대값은 이 거리에 반지름을 더한값
최소값은 이 거리에 반지름을 뺀 값이 되므로

$$(\sqrt{5}+1) + (\sqrt{5}-1) = 2\sqrt{5}$$

8. $f(x) = \frac{kx+1}{x+2}$ 을 x 축 방향으로 -2 만큼 이동..., $x=x+2$ 를 대입

y 축의 방향으로 3만큼 이동..., $y=y-3$ 을 대입

즉 이동한 유리함수 $f(x)$

$$f(x) = \frac{(k+3)x+2k+13}{x+4}$$

접근선의 교점이 이동하기 전 $f(x)$ 위의 점이므로 접근선의 교점은 x 축은 분모가 0이 되면 안되는 값이므로 $x=4$, y 축은 분모,분자 x 의 계수값의 비로 $(k+3)$ 이 된다.

즉 접근선 교점 $(4, k+3)$ 을 $f(x) = \frac{kx+1}{x+2}$ 에 대입

$$\text{정리하면 } k = \frac{7}{2}$$

9. $x^2 + x + 1 = 0$ 에서 두 근 α, β 는 근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = -1, \quad \alpha\beta = -1$$

$\sum_{k=1}^{10} (k - \alpha^2)(k - \beta^2)$ 을 전개

$\sum_{k=1}^{10} k^2 - k(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha\beta)^2$ 이고 시그마 특성상 각각의 덧셈과 뺄셈으로 이뤄진 식을 나눠서

계산 가능하므로

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 385$$

$$\sum_{k=1}^{10} -k(\alpha^2 + \beta^2) = -3k = -3 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = -165$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3$$

$$\sum_{k=1}^{10} (\alpha\beta)^2 = 10$$

$$\text{즉 } 385 + (-165) + 10 = 230$$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n + 7)$ 은 수렴

$$\text{즉, } \lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n + 7) = 0 \text{이므로 } a_n \text{은 } -\frac{7}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+2} \text{이므로}$$

$$\left(-\frac{7}{3}\right) + \left(-\frac{7}{3}\right) = -\frac{14}{3}$$

11. $\log_3(-n^3 + 15n^2 - 66n + 80)$ 값이 존재하려면

$$-n^3 + 15n^2 - 66n + 80 > 0$$

$$(n-2)(n-5)(n-8) < 0$$

n 에 대한 일차식이 전부 음수이거나 한 식만 음수인 경우

성립되므로 $n = 1, 6, 7$ 이고

$$1 + 6 + 7 = 14$$

12. $x^2 - 4x + 2 = 0$ 의 두근 α, β 이므로 근과 계수와의 관계

$$\alpha + \beta = 4, \quad \alpha\beta = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+2\beta} - \sqrt{x+2\alpha}) = ?$$

이 식 분모, 분자에

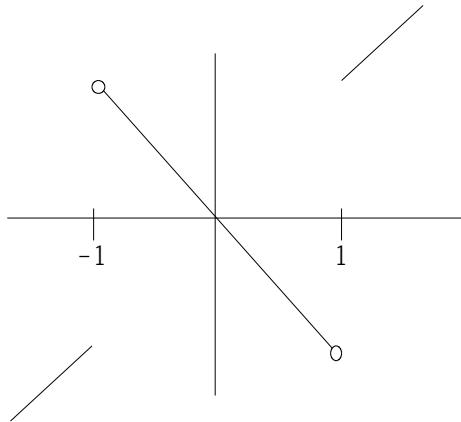
$$\sqrt{(x+2b)+\sqrt{(x+2a)}}$$

를 곱하면 다음과 같다.

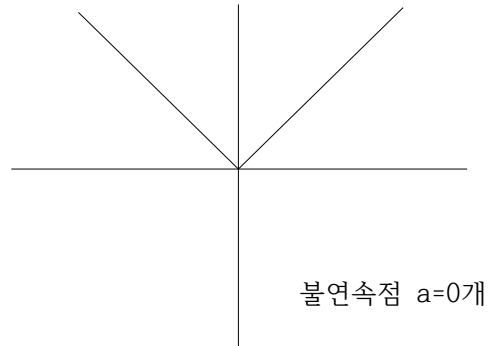
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \frac{2(\beta - \alpha)}{(\sqrt{x+2\beta} + \sqrt{x+2\alpha})}, \dots, \beta - \alpha = \sqrt{(\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{x} \text{의 계수만 비교하면 되니깐 } \frac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{1+1} = 2\sqrt{2}$$

13.f(x)그래프는 다음과 같다.



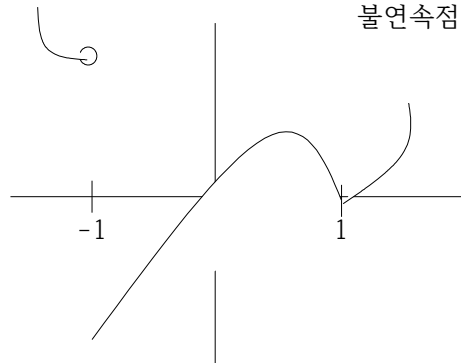
g(x)는 다음과 같다.



h(x)의 그래프

$$|x| \geq 1, h(x) = x^2 - x$$

$$|x| < 1, h(x) = -x^2 + x$$



14. $y = x^2 + x$ 에 그은 접선의 방정식에 기울기를 각각 a_1, a_2 라 하고
각각의 접선의 방정식은 $(1, -2)$ 를 지나므로

$$f_1(x) = a_1(x - 1) - 2$$

$$f_2(x) = a_2(x - 1) - 2$$

$$f_1(2) + f_2(2) = a_1 + a_2 - 4 = ?$$

접선의 방정식은 $x^2 + x$ 를 미분한 값이 기울기 이므로
 $(2x + 1)(x - 1) - 2 = 2x^2 - x - 3$

이 접선의 방정식과 $x^2 + x$ 는 두 점에서 만나기 때문에

$$x^2 + x = 2x^2 - x - 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \text{ 두 근은 } -1 \text{과 } 3$$

즉 $(-1, 0)$, $(3, 12)$ 를 지나므로 위의 두 접선의 방정식에 대입하면

$$a_1 = -1, a_2 = 7 \text{ 나오므로}$$

$$-1 + 7 - 4 = 2$$

15. 극대,극소값은 함수를 미분했을 시에 0이 되는 값 즉 두 근이 된다.

$f(x)$ 를 미분하면

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax - 2$$

여기서 α, β 는 두 근이므로 근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = \frac{2a}{3}, \quad \alpha\beta = -\frac{2}{3}$$

$$\alpha + \beta = \frac{2}{3} \text{ 이므로 } a=1,$$

$$f(3\alpha\beta) = f(-2)$$

$x=-2$ 를 $f(x)$ 에 대입하면

$$f(3\alpha\beta) = -6$$

$$16. \int_0^3 \frac{x^2+1}{2x+2} dx - \int_0^3 \frac{1}{y+1} dy$$

여기서 자연로그를 이용해서 적분값을 구할 수 있지만 고등학교 과정이기 때문에

$\int_0^3 \frac{1}{y+1} dy$ 값과 동일한 값을 $\int_0^3 \frac{x^2+1}{2x+2} dx$ 에서 도출해야 한다는 것을 눈치 채야 합니다.

즉, $\frac{x^2+1}{2x+2} = \frac{1}{2} \frac{x^2+1}{x+1}$,,, 분모를 없애주기 위해 분자에 $(x+1)$ 에 관한식을 세운다.

$$\frac{x^2+1}{2} = \frac{(x+1)(x-1)+2}{2(x+1)} = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{1}{y+1} dy = \frac{1}{x+1} dx \text{ 이므로}$$

$$\int_0^3 \frac{1}{2}(x-1) = \frac{3}{4}$$

$$17. \int (f(x) - 5x) = xf(x) - 2x^3 + 5x^2, f(1) = -4$$

양변을 미분하면

$$f(x) - 5x = f(x) + xf'(x) - 6x^2 + 10x$$

정리하면

$$xf'(x) = 6x^2 - 15x$$

$$f'(x) = 6x - 15$$

$$f(x) = 3x^2 - 15x + c, \text{,,}, f(1) = -4 \text{ 이므로}$$

$$3 - 15 + c = -4$$

$$c = 8$$

$$\text{즉, } f(x) = 3x^2 - 15x + 8$$

$$f(x) = 3\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{43}{4}$$

$$\text{최소값은 } -\frac{43}{4}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4} \left(\int_2^x f(t) dt - f(x) \right) = 4$$

$f(2)=0$ 이고, 분모, 분자가 x 가 2로 향할 때 $\frac{0}{0}$ 꼴이므로 로피탈 정리를 이용해서 분모 분자를 미분하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f'(x)}{2x} = -\frac{f'(2)}{4} = 4$$

이므로 $f'(2) = -16$

$$19. 20이 나오지 않을 확률 $\frac{19}{20}$ 나올 확률 $\frac{1}{20}$$$

2번 시행하면서 2개의 공을 꺼낸다고 했고 다시 상자에 넣는다고 했으므로

20이 나올 확률은 총 1~4번 나올 수 있다

각각의 경우의 수를 계산하는 것보다는 적어도란 개념을 이용해서

전체 확률 1에서 20이 나오지 않을 확률을 빼면 된다.

$$1 - \frac{{}^{19}C_2}{{}^{20}C_2} \cdot \frac{{}^{19}C_2}{{}^{20}C_2} = \frac{19}{100}$$

20. $0.5 - 0.0062 = 0.4938$ 이므로 표준정규분포표를 보면 $Z \geq 2.5$ 을 알 수 있다.

$$\text{즉, } \frac{20 - m}{\frac{3.6}{\sqrt{36}}} \geq 2.5 \text{ 이므로 } m = 18.5$$

※ 저도 이번에 시험을 치르면서 수학 때문에 굉장히 시간 조절을 못했네요.

개인적으로 굉장히 어려운 시험이었습니다.

이해 안가는 부분이 있으시면 댓글 달아주시고 도움이 되셨으면 좋겠습니다. 감사합니다.

부족한 해설이지만 최대한 빨리 풀 수 있는 방식으로 풀었습니다.