

2018학년도 대학수학능력시험
수학영역 나형 정답 및 풀이

01. ②	02. ④	03. ①	04. ①	05. ③
06. ⑤	07. ⑤	08. ②	09. ①	10. ③
11. ④	12. ⑤	13. ②	14. ①	15. ⑤
16. ③	17. ⑤	18. ④	19. ②	20. ③
21. ②	22. 10	23. 7	24. 5	
25. 30	26. 4	27. 14	28. 43	
29. 32	30. 9			

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 3}{5^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{5^{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{5} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{5^{n+1}} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

정답 ①

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & 2 \times 16^{\frac{1}{4}} \\ &= 2 \times (2^4)^{\frac{1}{4}} \\ &= 2 \times 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

정답 ②

2. 출제의도 : 집합의 상등을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & a+1=3, b=5 \text{이므로} \\ & a+b=2+5 \\ &=7 \end{aligned}$$

정답 ④

3. 출제의도 : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

4. 출제의도 : 합성함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & f(2)=2 \text{이므로} \\ & g(f(2))=g(2) \\ &=1 \end{aligned}$$

정답 ①

5. 출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & x \rightarrow 0^- \text{일 때, } f(x) \rightarrow 0 \text{이므로} \\ & \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \\ & \text{또, } x \rightarrow 1^+ \text{일 때, } f(x) \rightarrow 3 \text{이므로} \\ & \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \\ & \text{따라서,} \\ & \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \\ &= 0 + 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

정답 ③

6. 출제의도 : 두 조건에 대하여 조건을 만족시키는 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{1, 4\}$$

$$Q = \left\{x \mid \frac{1}{2} < x \leq \frac{a}{2}\right\}$$

이때, p 가 q 이기 위한 충분조건이므로

$$P \subset Q$$

따라서 $4 \leq \frac{a}{2}$ 에서 $a \geq 8$ 이므로

구하는 최솟값은 8이다.

정답 ⑤

7. 출제의도 : 조건부 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

고등학교 학생 중 임의로 선택한 1명이 지역 A를 희망한 학생일 사건을 A, 고등학교 학생 중 임의로 선택한 1명이 지역 B를 희망한 학생일 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{140}{500}}{\frac{180}{500}} \\ &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

정답 ⑤

8. 출제의도 : 자연수의 분할의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} 11 &= 7 + 4 \\ &= 6 + 5 \\ &= 5 + 3 + 3 \\ &= 4 + 4 + 3 \end{aligned}$$

이므로 구하는 방법의 수는 4이다.

정답 ②

9. 출제의도 : 정적분을 미적분의 기본정리를 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} &\int_0^a (3x^2 - 4)dx \\ &= [x^3 - 4x]_0^a \\ &= a^3 - 4a \\ &= a(a+2)(a-2) = 0 \\ &a = -2 \text{ 또는 } a = 0 \text{ 또는 } a = 2 \\ &\text{따라서, } a > 0 \text{이므로} \\ &a = 2 \end{aligned}$$

정답 ①

10. 출제의도 : 독립인 두 사건에 대하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} &\text{두 사건 } A, B \text{가 서로 독립이므로} \\ &P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \\ &P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \text{에서} \\ &\frac{5}{6} = \frac{2}{3} + P(B) - \frac{2}{3} \times P(B) \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{3} \times P(B) = \frac{1}{6}$ 에서

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

정답 ③

11. 출제의도 : 유리함수의 그래프를 이해하고 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$y = \frac{1}{2x-8} + 3$$

$$= \frac{1}{2(x-4)} + 3$$

그러므로 함수 $y = \frac{1}{2x-8} + 3$ 의 그래프

는 $y = \frac{1}{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

한편, $y=0$ 을 대입하면

$$\frac{1}{2x-8} + 3 = 0, \quad \frac{1}{2x-8} = -3$$

$$2x-8 = -\frac{1}{3}, \quad x = \frac{23}{6}$$

그러므로 조건을 만족시키는 자연수 x 는 1, 2, 3이다.

(i) $x=1$ 일 때,

$$y = -\frac{1}{6} + 3 = \frac{17}{6}$$

그러므로 조건을 만족시키는 순서쌍은 (1, 1), (1, 2)이다.

(ii) $x=2$ 일 때,

$$y = -\frac{1}{4} + 3 = \frac{11}{4}$$

그러므로 조건을 만족시키는 순서쌍은 (2, 1), (2, 2)이다.

(iii) $x=3$ 일 때,

$$y = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2}$$

그러므로 조건을 만족시키는 순서쌍은 (3, 1), (3, 2)이다.

따라서, (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 순서쌍의 개수는

$$2+2+2=6$$

정답 ④

12. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 항의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\left(x + \frac{2}{x}\right)^8$ 의 일반항은

$${}_8C_r x^{8-r} \left(\frac{2}{x}\right)^r = {}_8C_r 2^r x^{8-2r}$$

($r=0, 1, 2, \dots, 8$)

따라서 $8-2r=4$ 에서 $r=2$ 이므로

x^4 의 계수는

$${}_8C_2 \times 2^2 = 28 \times 4 = 112$$

정답 ⑤

13. 출제의도 : 귀납적으로 주어진 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_1 = 2$ 이고 이 수는 짝수이므로

$$a_2 = a_1 - 1 = 1$$

이때, a_2 는 홀수이므로

$$a_3 = a_2 + 2 = 1 + 2 = 3$$

a_3 는 홀수이므로

$$a_4 = a_3 + 3 = 3 + 3 = 6$$

a_4 는 짝수이므로

$$a_5 = a_4 - 1 = 6 - 1 = 5$$

a_5 는 홀수이므로

$$a_6 = a_5 + 5 = 5 + 5 = 10$$

a_6 는 짝수이므로

$$a_7 = a_6 - 1 = 10 - 1 = 9$$

정답 ②

14. 출제의도 : 조건을 만족시키는 등차수열의 첫째항과 공차를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하자.

$$\frac{a_5 + a_{13}}{2} = a_9 \text{이므로 } a_9 = 0 \text{에서}$$

$$a + 8d = 0 \quad \cdots \quad \textcircled{\text{A}}$$

$$\begin{aligned} \text{또, } \sum_{k=1}^{18} a_k &= \frac{18}{2} \times (a_1 + a_{18}) \\ &= 9(2a + 17d) \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } 9(2a + 17d) = \frac{9}{2} \text{에서}$$

$$2a + 17d = \frac{1}{2} \quad \cdots \quad \textcircled{\text{B}}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = -4, d = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$a_{13} = a + 12d$$

$$= -4 + 12 \times \frac{1}{2} = 2$$

정답 ①

15. 출제의도 : 표본평균의 확률분포에서의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

공장에서 생산하는 화장품 1개의 내용량을 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(201.5, 1.8^2)$ 을 따른다.

이때, 이 공장에서 생산한 화장품 중 임의추출한 9개의 화장품 내용량의 표본평균을 확률변수 $\bar{X}$ 라 하면 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(201.5, \frac{1.8^2}{9}\right)$ 즉, $N(201.5, 0.6^2)$ 을 따른다.

고, $Z = \frac{\bar{X} - 201.5}{0.6}$ 로 놓으면 확률변수 Z

는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서, 구하는 확률은

$$\begin{aligned} &P(\bar{X} \geq 200) \\ &= P\left(\frac{\bar{X} - 201.5}{0.6} \geq \frac{200 - 201.5}{0.6}\right) \\ &= P(Z \geq -2.5) \\ &= P(-2.5 \leq Z \leq 0) + P(Z \geq 0) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2.5) + P(Z \geq 0) \\ &= 0.4938 + 0.5 \\ &= 0.9938 \end{aligned}$$

정답 ⑤

16. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\log_{\sqrt{3}} a = 2 \log_3 a = 4 \log_9 a = \log_9 a^4 \text{이므로}$$

$$\log_9 a^4 = \log_9 ab \text{에서}$$

$$a^4 = ab$$

$$a(a^3 - b) = 0 \text{에서 } b = a^3$$

$$\text{따라서 } \log_a b = \log_a a^3 = 3$$

정답 ③

17. 출제의도 : 이산확률변수의 평균을 구할 수 있고 평균, 분산, 표준편차의 성질을 이해하는가?

정답풀이 :

$Y = 10X - 2.21$ 이라 하자.

확률변수 Y 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	-1	0	1	합계
$P(Y=y)$	a	b	$\frac{2}{3}$	1

확률의 총합이 1이므로

$$a + b + \frac{2}{3} = 1$$

$$a + b = \frac{1}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

또, $E(Y) = 10E(X) - 2.21 = 0.5$ 이므로

$$E(Y) = (-1) \times a + 0 \times b + 1 \times \frac{2}{3}$$

$$= -a + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

그러므로 ⑦과 ⑧에서

$$a = \frac{1}{6}, \quad b = \frac{1}{6}$$

이고 $V(Y) = \frac{7}{12}$ 이다.

한편, $Y = 10X - 2.21$ 이므로

$$V(Y) = 100 \times V(X) \text{이다.}$$

따라서,

$$V(X) = \frac{1}{100} \times \frac{7}{12}$$

이다.

그러므로 $p = \frac{1}{6}, q = \frac{1}{6}, r = 100$ 이므로

$$pqr = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times 100 = \frac{25}{9}$$

정답 ⑤

18. 출제의도 : 미분법을 이용하여 조건을 만족시키는 삼차함수의 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2} = \frac{1}{4} \text{에서}$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉 $f(2) = 0$ 이므로

$f(x) = (x-1)(x-2)(x+a)$ 로 놓을 수 있다.

이때, $f'(x) = (x-2)(x+a)$

$$+ (x-1)(x+a) + (x-1)(x-2)$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x+a)}{\{f'(x)\}^2}$$

$$= \frac{2+a}{(2+a)^2} = \frac{1}{2+a}$$

따라서 $\frac{1}{2+a} = \frac{1}{4}$ 에서 $a = 2$ 이므로

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x+2)$$

$$\text{즉 } f(3) = 2 \times 1 \times 5 = 10$$

정답 ④

19. 출제의도 : 등비급수를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle B_1C_1D_1 = 30^\circ$, $\angle C_1D_1B_1 = 90^\circ$ 이므로

직각삼각형 $B_1C_1D_1$ 에서

$$\overline{C_1D_1} = \overline{B_1C_1} \cos 30^\circ$$

$$= 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

한편, 두 선분 B_1B_2 , B_1D_1 과 호 D_1B_2 로 둘러싸인 영역의 넓이는

$$\triangle B_1C_1D_1 - (\text{부채꼴 } B_2C_1D_1)$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{C_1D_1} \times \overline{D_1B_1} - \overline{C_1D_1}^2 \times \pi \times \frac{30^\circ}{360^\circ}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \times \pi \times \frac{1}{12}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{16}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} - \pi}{16} \dots\dots \textcircled{\text{A}}$$

또, 삼각형 $C_1A_2C_2$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{C_2C_1} \times \overline{C_1A_2} \times \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \overline{B_2C_1} \right) \times (\overline{B_2C_1} \cos 30^\circ) \times \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{64} \dots\dots \textcircled{\text{B}}$$

따라서, R_1 의 넓이 S_1 은 $\textcircled{\text{A}}$ 과 $\textcircled{\text{B}}$ 에 의해

$$S_1 = \frac{2\sqrt{3} - \pi}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{64}$$

$$= \frac{11\sqrt{3} - 4\pi}{64}$$

한편, 직각삼각형 $A_2B_2C_1$ 에서

$$\angle B_2C_1A_2 = 30^\circ \text{ 이므로}$$

$$\angle A_2B_2C_1 = 60^\circ$$

또,

$$\overline{A_2B_2} = \overline{B_2C_1} \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \overline{B_2C_1} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

그러므로 삼각형 $A_2B_2C_2$ 에서

$$\angle A_2B_2C_2 = 60^\circ \text{ 이고 } \overline{A_2B_2} = \overline{B_2C_2}$$

즉, 삼각형 $A_2B_2C_2$ 은 한 변의 길이가

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ 인 정삼각형이다.}$$

그러므로 길이의 비가 $1 : \frac{\sqrt{3}}{4}$ 이므로 넓

이의 비는 $1 : \frac{3}{16}$ 이다.

따라서,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$= \frac{11\sqrt{3} - 4\pi}{64}$$

$$= \frac{1 - \frac{3}{16}}{1 - \frac{3}{16}}$$

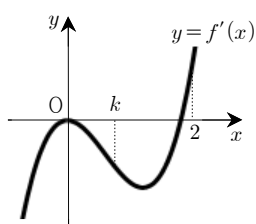
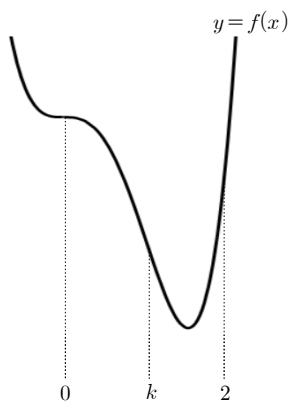
$$= \frac{11\sqrt{3} - 4\pi}{52}$$

정답 ②

20. 출제의도 : 조건을 만족시키는 사차 함수의 그래프와 도함수의 그래프를 이용하여 참 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

두 조건 (가), (나)를 만족시키는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프에서

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프와 x 축은 열린 구간 $(k, 2)$ 에서 만난다.

즉 방정식 $f'(x)=0$ 은 열린 구간 $(0, 2)$ 에서 한 개의 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서

함수 $f(x)$ 는 극솟값을 갖는다. (거짓)

ㄷ. $f(0)=0$ 이면 양수 a 에 대하여

$f(x)=x^3(x-a)$ 로 놓을 수 있다.

$f(x)=x^4-ax^3$ 에서

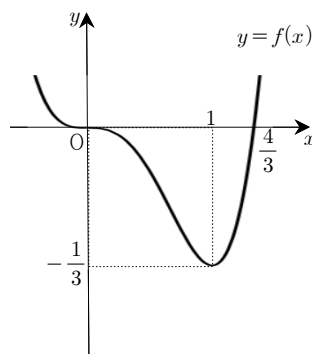
$f'(x)=4x^3-3ax^2$ 이고

$f'(2)=32-12a=16$ 에서 $a=\frac{4}{3}$

즉 $f(x)=x^3\left(x-\frac{4}{3}\right)$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값 $-\frac{1}{3}$

을 가지므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 모든 실수 x 에 대하여

$f(x) \geq -\frac{1}{3}$ 이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답 ③

21. 출제의도 : 합성함수에 관련된 주어진 조건을 그래프를 이용하여 이해할 수 있는가?

정답풀이 :

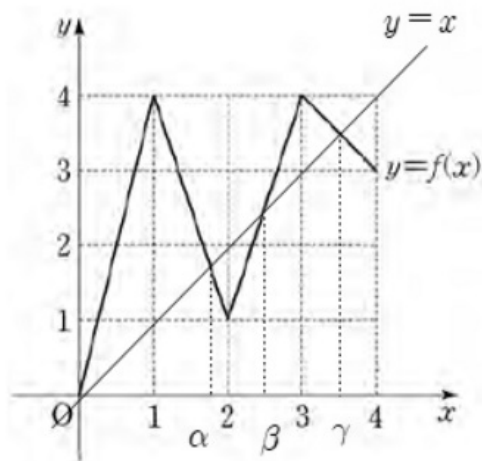
$g(a)=f(a)$, $g(b)=f(b)$ 에서

$f(f(a))=f(a)$, $f(f(b))=f(b)$

이때, $f(a)=k$ 라 하면

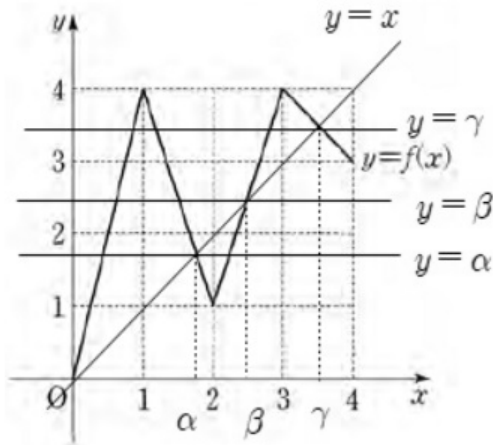
$f(k)=k$

그러므로 k 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 만나는 점의 x 좌표이다.



이때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 만나는 점 중 원점이 아닌 점의 x 좌표를 위의 그림과 같이 α, β, γ ($0 < \alpha < \beta < \gamma$)라 하자.

이제, $f(x)$ 의 값이 $0, \alpha, \beta, \gamma$ 인 경우를 나타내면 다음과 같다.



(i) $f(x)=0$ 인 경우

x 의 값은 0이다.

(ii) $f(x)=\alpha$ 인 경우

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=\alpha$ 는 그림과 같이 세 점에서 만난다.

이때, $x \neq \alpha$ 인 값을 x_1, x_2 ($x_1 < \alpha < x_2$)라 하면 x 의 값은 x_1, α, x_2 이다.

(iii) $f(x)=\beta$ 인 경우

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=\beta$ 는 그림과 같이 세 점에서 만난다.

이때, $x \neq \beta$ 인 값을 y_1, y_2 ($y_1 < y_2 < \beta$)라 하면 x 의 값은 y_1, y_2, β 이다.

(iv) $f(x)=\gamma$ 인 경우

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=\gamma$ 는 그림과 같이 네 점에서 만난다.

이때, $x \neq \gamma$ 인 값을

z_1, z_2, z_3 ($z_1 < z_2 < z_3 < \gamma$)라 하면 x 의 값은 z_1, z_2, z_3, γ 이다.

이때, 함수 $g(x)=f(f(x))$ 가 집합 X 에서

X 로의 함수이어야 하므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i) $f(x)$ 의 값이 $0, \alpha, \beta, \gamma$ 의 값 중 서로 다른 두 값을 갖도록 a, b 를 정하는 경우

이 경우 $f(x)=0, f(x)=\alpha, f(x)=\beta, f(x)=\gamma$ 인 x 의 값은 각각 $0, \alpha, \beta, \gamma$ 이어야 한다.

즉, 두 수 a, b 는 $0, \alpha, \beta, \gamma$ 에서 서로 다른 두 수를 택해야 하므로 집합 X 의 개수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

(ii) $f(x)$ 의 값이 $0, \alpha, \beta, \gamma$ 의 값 중 하나의 값만 갖도록 a, b 를 정하는 경우

$f(x)=0$ 일 때는 두 수 a, b 를 결정할 수 없다.

$f(x)=\alpha$ 일 때는 두 수 a, b 는 x_1, α, x_2 중 α 를 반드시 포함하여 두 수를 택해야 하므로 집합 X 의 개수는 2이다.

$f(x)=\beta$ 인 경우 두 수 a, b 는 y_1, y_2, β 중 β 를 반드시 포함하여 두 수를 택해야 하므로 집합 X 의 개수는 2이다.

$f(x)=\gamma$ 인 경우 두 수 a, b 는 z_1, z_2, z_3, γ 중 γ 를 반드시 포함하여 두 수를 택해야 하므로 집합 X 의 개수는 3이다.

그러므로 집합 X 의 개수는 7이다. 따라서, (i), (ii)에서 구하는 집합 X 의 개수는

$$6 + 7 = 13$$

정답 ②

22. 출제의도 : 조합의 기호를 알고, 그

값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

정답 10

23. 출제의도 : 미분법과 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = 2x^3 + x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 1 \text{이므로}$$

$$f'(1) = 6 \times 1^2 + 1 = 7$$

정답 7

24. 출제의도 : 두 집합에 대하여 주어진 집합의 원소의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$B^C = \{1, 3, 5, 7\} \text{이므로}$$

$$A \cup B^C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$$

$$\text{따라서 } n(A \cup B^C) = 5$$

정답 5

25. 출제의도 : 함수의 극한의 성질을 이용하여 함수의 극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x+1)f(x) = 1 \text{이므로}$$

$g(x) = (x+1)f(x)$ 로 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$$

따라서, $x \neq -1$ 일 때, $f(x) = \frac{g(x)}{x+1}$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 1)f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ (2x^2 + 1) \times \frac{g(x)}{x+1} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 1}{x+1} \times \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

$$= \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$$

그러므로

$$20a = 20 \times \frac{3}{2} = 30$$

정답 30

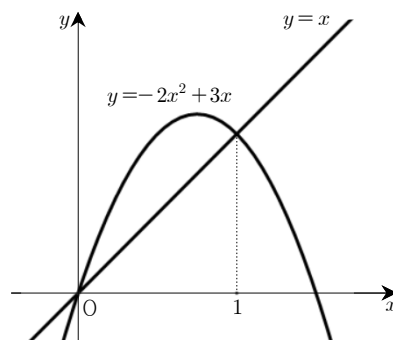
26. 출제의도 : 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$-2x^2 + 3x = x$ 에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 이므로

곡선 $y = -2x^2 + 3x$ 와 직선 $y = x$ 가 만나는 점의 x 좌표는 0, 1이고

곡선 $y = -2x^2 + 3x$ 와 직선 $y = x$ 는 그림과 같다.



구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{(-2x^2 + 3x) - x\} dx \\ &= \int_0^1 (-2x^2 + 2x) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 \right]_0^1 \\ &= -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

따라서 $p+q=3+1=4$

정답 4

27. 출제의도 : $\sum$ 의 성질을 이용할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)^2 &= 28 \text{에서} \\ \sum_{k=1}^{10} \{(a_k)^2 + 2a_k + 1\} &= 28 \\ \sum_{k=1}^{10} (a_k)^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 1 &= 28 \\ \sum_{k=1}^{10} (a_k)^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} a_k &= 18 \quad \cdots \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$$\text{또, } \sum_{k=1}^{10} a_k(a_k + 1) = 16 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \{(a_k)^2 + a_k\} &= 16 \\ \sum_{k=1}^{10} (a_k)^2 + \sum_{k=1}^{10} a_k &= 16 \end{aligned}$$

이 식의 양변에 2를 곱하면

$$2 \sum_{k=1}^{10} (a_k)^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} a_k = 32 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑧에서 ⑦을 변끼리 빼면

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k)^2 = 14$$

정답 14

28. 출제의도 : 독립시행의 확률을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

앞면이 6회, 뒷면이 0회 나올 확률은

$${}_6C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

앞면이 5회, 뒷면이 1회 나올 확률은

$${}_6C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

앞면이 4회, 뒷면이 2회 나올 확률은

$${}_6C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} &{}_6C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \\ &= ({}_6C_0 + {}_6C_1 + {}_6C_2) \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \\ &= (1 + 6 + 15) \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \\ &= \frac{22}{64} = \frac{11}{32} \end{aligned}$$

이므로 $p+q=32+11=43$

정답 43

29. 출제의도 : 미분가능성을 이해하고 있으며 미분을 이용하여 부등식에 관련된 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$ 는 $x < a$, $x > a$ 일 때, 다항함수이므로 이 범위에서 미분가능하다.

한편, 조건 (가)에서 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능해야 하므로 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 미분가능해야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

이어야 한다.

이때,

$$\lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{0 - 0}{x - a} = 0 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

또,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{(x-1)^2(2x+1)}{x-a} \end{aligned}$$

여기서 $x \rightarrow a+$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재해야 하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow a+} (x-1)^2(2x+1) = 0$$

$$(a-1)^2(2a+1) = 0$$

$$a = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } a = 1$$

(i) $a = -\frac{1}{2}$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}+} \frac{(x-1)^2(2x+1)}{x - \left(-\frac{1}{2}\right)} \\ = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}+} 2(x-1)^2 \\ = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

이 값은 $\textcircled{7}$ 의 값과 다르므로 $a = -\frac{1}{2}$ 일 때 함수 $f(x)$ 는 미분가능하지

않다.

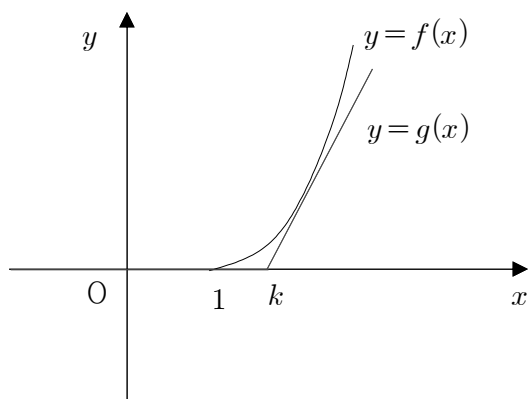
(ii) $a = 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x-1)^2(2x+1)}{x-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1+} (x-1)(2x+1) \\ = 0 \end{aligned}$$

이 값은 $\textcircled{7}$ 의 값과 같으므로 $a = 1$ 일 때 함수 $f(x)$ 는 미분가능하다.

따라서, (i), (ii)에서 $a = 1$ 이다.

한편, 조건 (나)에서 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq g(x)$ 이어야 하므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 함수 $y = g(x)$ 의 그래프보다 위쪽에 있거나 접해야 한다.



$x > 1$ 일 때, 함수 $f(x) = (x-1)^2(2x+1)$ 와 접하고 기울기가 12인 접선의 접점을 $(m, f(m))$ ($m > 1$)라 하자.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \{(x-1)^2\}'(2x+1) + (x-1)^2(2x+1)' \\ &= 2(x-1)(2x+1) + 2(x-1)^2 \\ &= (x-1)\{(4x+2) + (2x-2)\} \\ &= 6x(x-1) \end{aligned}$$

이때, 접선의 기울기가 12이므로

$$6m(m-1) = 12$$

$$m^2 - m - 2 = 0$$

$$(m+1)(m-2) = 0$$

$$m = -1 \text{ 또는 } m = 2$$

이때, $m > 1$ 이므로

$$m = 2$$

그러므로 접선의 방정식은

$$y - 5 = 12(x - 2)$$

$$y = 12x - 19$$

$$y = 12\left(x - \frac{19}{12}\right)$$

따라서, $k \geq \frac{19}{12}$ 이므로 k 의 최솟값은

$$\frac{19}{12} \text{이다.}$$

그러므로

$$a + p + q = 1 + 12 + 19 = 32$$

정답 32

30. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 함수에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 을 정하고, 극한값을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직선 $y = x$ 와 x 축 및 직선 $x = n$ 으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{n^2}{2}$ 이다.

$$2\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{n^2}{2}\right) = \frac{241}{768} \text{이므로}$$

$$F(x) = h(x) - x$$

$$= \begin{cases} g(x) - x & (0 \leq x < 5 \text{ 또는 } x \geq k) \\ x - g(x) & (5 \leq x < k) \end{cases}$$

로 놓으면

$$2\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n F(x) dx = \frac{241}{768} \text{이다.}$$

$n \leq x < n+1$ 일 때

$$g(x) - x = \frac{1}{2^n} \{f(x-n) - (x-n)\}$$

$$= \frac{1}{2^n} \left\{ \frac{3}{2}(x-n) - \frac{1}{2}(x-n)^2 - (x-n) \right\}$$

$$= \frac{1}{2^n} \left\{ \frac{1}{2}(x-n) - \frac{1}{2}(x-n)^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}(x-n)(1+n-x)$$

$$= -\frac{1}{2^{n+1}}(x-n)(x-(n+1))$$

이므로

$$\int_n^{n+1} \{g(x) - x\} dx$$

$$= \int_n^{n+1} \left\{ -\frac{1}{2^{n+1}}(x-n)(x-(n+1)) \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left\{ -\frac{1}{2^{n+1}}x(x-1) \right\} dx$$

$$= -\frac{1}{2^{n+1}} \int_0^1 x(x-1) dx$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{6} \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\text{한편, } \int_0^n F(x) dx$$

$$= \int_0^1 (x-g(x)) dx + \dots + \int_4^5 (x-g(x)) dx$$

$$+ \int_5^6 (x-g(x)) dx + \dots + \int_{k-1}^k (x-g(x)) dx$$

$$+ \int_k^{k+1} (x-g(x)) dx + \dots + \int_{n-1}^n (x-g(x)) dx$$

이때, $\textcircled{7}$ 은 $n=0$ 일 때도 성립하므로 $\textcircled{7}$ 에서

$$2 \int_0^n F(x) dx$$

$$= \frac{1}{3} \times \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^5 \right\}$$

$$- \frac{1}{3} \times \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^k \right\}$$

$$+ \frac{1}{3} \times \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \times \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{3} \times \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^k \right\} \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{\frac{1}{2} \times \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{2}} \\
& \quad - \frac{2}{3} \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-5} \right\}}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{3} \times \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} \\
& \quad - \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-5} \right\} \\
&= \frac{1}{3} \times \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} - \frac{1}{48} \times \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-5} \right\}
\end{aligned}$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
& 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n F(x) dx \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{48} \times \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-5} \right\} \\
&= \frac{15}{48} + \frac{1}{48} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-5} \\
&\approx \frac{15}{48} + \frac{1}{48} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-5} = \frac{241}{768} \text{에서} \\
&\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5} = \frac{1}{16} \text{이므로} \\
&k-5=4 \text{에서 } k=9
\end{aligned}$$

정답 9