2016년 제2차 경찰공무원(순경) 수학 해설

01. ①	02. ③	03. ④	04. ②	05. ②	06. ③	07. ④	08. ①	09. ②	10. ①
11. ③	12. ②	13. ①	14. ②	15. ④	16. ④	17. ①	18. ③	19. ④	20. ②

1.【정답】①

방정식의 양변을 x로 나누면 $x-\sqrt{7}+\dfrac{1}{x}=0$, $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{7}$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=7-2=5$

2.【정답】③

$\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{2}=-i$, $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{2}=i$

$(-i)^{2016}+i^{2016}=1+1=2$

3.【정답】④

$|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}=\dfrac{\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot k}}{1}=\sqrt{5}$

$1-4k=5$, $k=-1$

4.【정답】②

$-1\le x\le 1$에서 x^2-2x+1의 범위는 $0\le x^2-2x+1\le 4$이다.

$x^2-2x+1=k$로 치환하면

$y=k^2-2k+2$, $0\le k\le 4$

$y=(k-1)^2+1$이므로 최댓값은 $k=4$일 때 $\alpha=10$이고, 최솟값은 $k=1$일 때 $\beta=1$이다. 따라서 $\alpha-\beta=10-1=9$

5.【정답】②

$x^2+2(m-1)x-(m-3)<0$

$\dfrac{D}{4}=(m-1)^2+(m-3)\le 0$

$m^2-m-2\le 0$

$(m-2)(m+1)\le 0$

$-1\le m\le 2$

6. 【정답】 ③

$4x^2-4xy+y^2+x^2+2x+1=0$

$(2x-y)^2+(x+1)^2=0$

$x=-1$, $y=2x=-2$

$x+y=-1-2=-3$

7. 【정답】 ④

$\log x=2+\alpha$, $0\leq\alpha<1$

$\log\sqrt{x}=\frac{1}{2}\log x=1+\frac{\alpha}{2}$

$\alpha=\frac{\alpha}{2}$, $\alpha=0$, $x=100$

8. 【정답】 ①

$a_n=S_n-S_{n-1}=3^{n+1}+k-3^n-k=2\cdot3^n\ (n\geq2)$

$a_1=S_1=9+k$이고 $9+k=2\cdot3$이면 첫째항부터 등비수열이므로

$k=-3$

9. 【정답】 ②

$(x-1)^2+(y+1)^2=8$이므로 중심 $(1,\ -1)$과 직선 $y=x-8$사이의 거리는

$d=\frac{|1+1-8|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$가 반지름 $2\sqrt{2}$보다 크므로 원과 직선사이의 거리의 최솟값은

$3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$이다.

10. 【정답】 ①

$(2[x]-1)([x]-2)<0$

$\frac{1}{2}<[x]<2$이고 $[x]$는 정수이므로 $[x]=1$이다.

따라서 $1\leq x<2$, $\alpha+\beta=1+2=3$

11. 【정답】 ③

$(n-2)x=-\frac{1}{nx}+n$

$n(n-2)x^2-n^2x+1=0$

따라서 두근의 곱 $A_nB_n=\frac{1}{n(n-2)}$이다.

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots\right)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

12. 【정답】 ②

$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^3+2}=1$에서 $g(x)$는 3차식이고 최고차항의 계수가 1임을 알 수 있다.

$g(0)=2$이므로 $g(x)=x^3+ax^2+bx+2$로 놓을 수 있다.

$x=0$에서 $(g\circ f)(x)$의 연속성을 조사하면

$g(f(0))=g(0)=2$

$\lim_{x\to 0}g(f(x))=\lim_{t\to 2}g(t)=8+4a+2b+2=2$

$2a+b=-4$

$x=2$에서 $(g\circ f)(x)$의 연속성을 조사하면

$g(f(2))=g(0)=2$

$\lim_{x\to 2-0}g(f(x))=\lim_{t\to 0+0}g(t)=2$

$\lim_{x\to 2+0}g(f(x))=\lim_{t\to -2+0}g(t)=-8+4a-2b+2=2$

$2a-b=4$

$a=0,\ b=-4$

$g(x)=x^3-4x+2$이므로 $g(1)=1-4+2=-1$

13. 【정답】 ①

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=5$이므로 $f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=5$

이다.

$4\cdot 2+1\cdot g'(0)=5$

$g'(0)=-3$

14. 【정답】 ②

$x^3-3x^2+x=3x^3-11x+\alpha$

$2x^3+3x^2-12x+\alpha=0$

서로 다른 두 점에서만 만나려면 방정식 $2x^3+3x^2-12x+\alpha=0$이 중근과 실근을 가지면 된다. 따라서 $2(x-a)^2(x-b)=0$의 꼴로 인수분해 되어야 한다.

$2(x-a)^2(x-b)=2x^3+3x^2-12x+\alpha$의 양변을 미분하면

$4(x-a)(x-b)+2(x-a)^2=6x^2+6x-12$

$2(x-a)(2x-2b+x-a)=6(x^2+x-2)$

$(x-a)(3x-a-2b)=3(x+2)(x-1)$

$a=1$이면 $-a-2b=6$에서 $b=-\dfrac{7}{2}$이다.

$a=-2$이면 $-a-2b=-3$에서 $b=\dfrac{5}{2}$이다.

$\alpha=-2a^2b$이므로 $-2\cdot 1^2\cdot\left(-\dfrac{7}{2}\right)=7$, $-2\cdot(-2)^2\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)=-20$

따라서 모든 α값의 합은 $7-20=-13$이다.

15. 【정답】 ④

$$\int_{-1}^{1}(4x^3+5x-2)f(x)dx=4\int_{-1}^{1}x^3f(x)dx+5\int_{-1}^{1}xf(x)dx-2\int_{-1}^{1}f(x)dx=-12$$

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=6,\ \int_{0}^{1}f(x)dx=3$$

$$\int_{-5}^{6}f(x)dx=11\int_{0}^{1}f(x)dx=11\times3=33$$

16. 【정답】 ④

$f(1)=1$, $f(2)=10$이므로 $g(1)=2$, $g(10)=2$이다.

$$\int_{1}^{10}g(x)dx=20-1-\int_{1}^{2}f(x)dx=19-\left[\frac{1}{4}x^4+x^2-2x\right]_1^2$$

$$=19-\left(\frac{15}{4}+3-2\right)=19-\frac{19}{4}=19\times\frac{3}{4}=\frac{57}{4}$$

17. **【정답】** ①

치역의 원소 1, 2, 3에 대응되는 원소의 개수를 순서쌍으로 나타내면 $(3, 1, 1)$, $(1, 3, 1)$, $(1, 1, 3)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 1, 2)$, $(1, 2, 2)$의 6가지이다. 여기서 각각의 순서쌍에 대해 $x_1 < x_2$라면 $f(x_1) \le f(x_2)$를 만족하는 경우는 1가지뿐이다.

$(3, 1, 1)$: 전체 ${}_5\mathrm{C}_3 \times {}_2\mathrm{C}_1 = 20$가지 중 만족하는 경우는 1가지

$(1, 3, 1)$: 전체 ${}_5\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_3 = 20$가지 중 만족하는 경우는 1가지

$(1, 1, 3)$: 전체 ${}_5\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_1 = 20$가지 중 만족하는 경우는 1가지

$(2, 2, 1)$: 전체 ${}_5\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_2 = 30$가지 중 만족하는 경우는 1가지

$(2, 1, 2)$: 전체 ${}_5\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 30$가지 중 만족하는 경우는 1가지

$(1, 2, 2)$: 전체 ${}_5\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_2 = 30$가지 중 만족하는 경우는 1가지

$$\frac{6}{20 \times 3 + 30 \times 3} = \frac{6}{150} = \frac{1}{25}$$

18. **【정답】** ③

길이가 5가 되는 경우는 위로 다섯 칸 또는 오른쪽으로 다섯 칸 가는 경우이다.

$$1 - {}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{3}\right)^5 - {}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{243 - 1 - 32}{243} = \frac{210}{243}$$

19. **【정답】** ④

$$\sum_{i=1}^{5} z_i = 2\sum_{i=1}^{5} x_i - 50 = 10,\ \sum_{i=1}^{5} x_i = 30$$

$$\sum_{i=1}^{5} z_i^2 = 4\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - 40\sum_{i=1}^{5} x_i + 500 = 100,\ \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 200$$

$$V(x) = E(X^2) - \{E(X)^2\} = \frac{200}{5} - \left(\frac{30}{5}\right)^2 = 40 - 36 = 4$$

20. **【정답】** ②

빨간공이 나오는 시행을 X라 하면 시행은 독립시행이므로

$E(X) = 150 \times \dfrac{3}{5} = 90$, $V(X) = 90 \times \dfrac{2}{5} = 36$, $\sigma(X) = 6$이다.

점수를 Y라 하면 $Y = 3X - 2(150 - X) = 5X - 300$이므로

$E(Y) = 5 \cdot 90 - 300 = 150$, $V(Y) = 5^2 \times 36$, $\sigma(Y) = 5 \times 6 = 30$이다.

$$\mathrm{P}(Y \ge 180) = \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{180 - 150}{30}\right) = \mathrm{P}(Z \ge 1) = 0.5 - 0.34 = 0.16$$