

2015년 경찰공무원(해경) 수학 해설

01. ④	02. ④	03. ④	04. ②	05. ①	06. ④	07. ②	08. ①	09. ③	10. ③
11. ③	12. ④	13. ②	14. ②	15. ③	16. ③	17. ①	18. ②	19. ③	20. ①

1. 【정답】 ④

$$\alpha^2 - 3\alpha - 3 = 0, \beta^2 - 3\beta - 3 = 0$$

$$\alpha^2 - 2\alpha - 3 = \alpha, \beta^2 - 2\beta - 3 = \beta$$

$$\frac{\alpha^2 - 2\alpha - 3}{\beta} + \frac{\beta^2 - 2\beta - 3}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$$

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = -3$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3^2 - 2(-3) = 15$$

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{15}{-3} = -5$$

2. 【정답】 ④

$$x^2 = x^3 - 2x$$

$$x(x^2 - x - 2) = x(x+1)(x-2) = 0$$

따라서 교점은 $-1, 0, 2$ 이다.

$-1 < x < 0$ 에서 $x^2 < x^3 - 2x$ 이고, $0 < x < 2$ 에서 $x^2 > x^3 - 2x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 x^3 - 2x - x^2 dx + \int_0^2 (x^2 - (x^3 - 2x)) dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 + (-4) + \frac{8}{3} + 4 = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

3. 【정답】 ④

케일리-헤밀턴 정리에 의해

$$A^2 - (5-1)A + (5 \cdot (-1) - (-2) \cdot 4)E = O$$

$$A^2 - 4A + 3E = O$$

$$pq = -12$$

4. 【정답】 ②

전체 사원수를 a 라 하면 구하려는 확률은

$$\frac{0.6a - 0.2a \times 0.3}{0.6a} = \frac{0.54a}{0.6a} = \frac{9}{10}$$

5. 【정답】 ①

제1코사인법칙에 의해

$$\overline{BC} = 2\sqrt{2} \times \cos 30^\circ + 2 \times \cos 45^\circ = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

6. 【정답】 ④

공차가 2이므로

$$a + 2d + a + 6d = 2a + 8d = 2a + 16 = 4012$$

$$a = 1998$$

$$a_{30} = a + 29d = 1998 + 58 = 2056$$

7. 【정답】 ②

$$\frac{2}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{2(1 + \sqrt{3}i)}{(1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i)} = \frac{2(1 + \sqrt{3}i)}{4} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \text{라 하면 } 2x = 1 + \sqrt{3}i$$

$$(2x - 1)^2 = (\sqrt{3}i)^2 = -3$$

$$4x^2 - 4x + 1 + 3 = 0, \quad x^2 - x + 1 = 0$$

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1 = 0$$

따라서 $x^3 = -1$ 이다.

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2016) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2016}$$

여섯 항씩 짝지으면 $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = x + x^2 - 1 - x - x^2 + 1 = 0$ 이고 계속 반복됨을 알 수 있다.

$$2016 = 6 \times 336 \text{이므로 } f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2016) = 0$$

8. 【정답】 ①

$$y^2 = 4 - x^2 \text{이므로 } 4x + y^2 = 4x + 4 - x^2 = -x^2 + 4x + 4 = -(x - 2)^2 + 8 \text{이다.}$$

$$y^2 = 4 - x^2 \geq 0 \text{이므로 } 4 - x^2 \geq 0 \text{의 부등식을 풀면 } -2 \leq x \leq 2 \text{이다.}$$

따라서 주어진 범위에서 $x = -2$ 일 때 최솟값 $f(-2) = -8$, $x = 2$ 일 때 최댓값 $f(2) = 8$ 을 갖는다.

$$-8 + 8 = 0$$

9. 【정답】 ③

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f'(1) = 3 + 2a + b = 4$$

$$f(1) = 1 + a + b + 1 = 5$$

$$a + b = 3, \quad 2a + b = 1$$

$$a = -2, \quad b = 5$$

$$a^2 + b^2 = (-2)^2 + 5^2 = 29$$

10. 【정답】 ③

$2 = 3 - 1$ 이므로 주어진 식을 변형하면

$$= (3 - 1)(3 + 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1) \cdots (3^{32} + 1)$$

$$= (3^2 - 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1) \cdots (3^{32} + 1)$$

$$\vdots$$

$$= (3^{32} - 1)(3^{32} + 1) = 3^{64} - 1$$

$$a = 64, \quad b = -1$$

$$a + b = 64 - 1 = 63$$

11. 【정답】 ③

12개의 점 중에서 2개를 선택하는 경우의 수에서 가로, 세로 대각선의 겹치는 경우를 빼주면 된다.

$$= {}_{12}C_2 - 3 \times ({}_4C_2 - 1) - 4 \times ({}_3C_2 - 1) - 4 \times ({}_3C_2 - 1)$$

$$= 66 - 15 - 8 - 8 = 35 \text{개}$$

12. 【정답】 ④

$m = -2$ 이면 주어진 식은 4가 되므로 양수가 된다.

$$(m + 2)x^2 - 2(m + 2)x + 4 > 0$$

$$\frac{D}{4} = (m + 2)^2 - 4(m + 2) = (m + 2)(m - 2) < 0$$

$$-2 < m < 2$$

$$\text{따라서 } -2 \leq x < 2$$

13. 【정답】 ②

$$\overline{AB} = \sqrt{(9-1)^2 + (8-2)^2} = 10$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(7-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{37}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(9-7)^2 + (8-3)^2} = \sqrt{29}$$

$$\cos A = \frac{10^2 + (\sqrt{29})^2 - (\sqrt{37})^2}{2 \times 10 \times \sqrt{29}} = \frac{92}{20\sqrt{29}} = \frac{23}{5\sqrt{29}}$$

$$\sin^2 A = 1 - \left(\frac{23}{5\sqrt{29}} \right)^2 = \frac{725 - 23^2}{725} = \frac{196}{725}, \quad \sin A = \frac{14}{5\sqrt{29}}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 10 \times \sqrt{29} \times \frac{14}{5\sqrt{29}} = 14$$

14. 【정답】 ②

중심의 좌표를 $(p, 2\sqrt{p})$ 로 놓으면 y 축에 접하므로 반지름은 p 가 된다.

$$(x-p)^2 + (y-2\sqrt{p})^2 = p^2$$

x 축과 만나는 점은

$$(x-p)^2 + (0-2\sqrt{p})^2 = p^2$$

$$x^2 - 2xp + p^2 + 4p = p^2$$

$$x^2 - 2xp + 4p = 0$$

$\overline{PQ}$ 의 길이는 방정식 $x^2 - 2xp + 4p = 0$ 의 두 근의 차와 같으므로

$$\frac{\sqrt{(2p)^2 - 4 \times 4p}}{1} = 2\sqrt{5}, \quad 4p^2 - 16p = 20$$

$$p^2 - 4p - 5 = 0, \quad (p-5)(p+1) = 0$$

$p = 5$ 이므로 원 O 의 넓이는 25π 이다.

15. 【정답】 ③

$n^2 = 2\alpha + 3$ 에서 좌변 n^2 이 정수이므로 우변 $2\alpha + 3$ 도 정수가 되어야 한다.

$0 \leq \alpha < 1$ 이므로 $\alpha = \frac{1}{2}$ 이다.

$$n^2 = 1 + 3 = 4, \quad n = 2$$

$$\log x = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$x = 10^{\frac{5}{2}}$$

16. 【정답】 ③

가로의 길이를 x , 세로의 길이를 y 라 하면

$$2x + 2y = 28, \quad x + y = 14$$

$$48 \leq xy \leq 49$$

$$48 \leq x(14 - x) \leq 49$$

$$-x^2 + 14x - 48 \geq 0, \quad (x - 6)(x - 8) \leq 0$$

$$6 \leq x \leq 8$$

$$-x^2 + 14x - 49 \leq 0, \quad (x - 7)^2 \geq 0$$

x 는 모든 실수

x 를 길지 않은 쪽의 길이로 하면 6 cm 이상 7 cm 이하가 되어야 한다.

17. 【정답】 ①

$$2na_n - \frac{3n^2 + n - 2}{n + 3} = b_n \text{이라 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{이다.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{5n + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \times \frac{1}{2n} \left(b_n + \frac{3n^2 + n - 2}{n + 3} \right)}{5n + 4} = \frac{3}{10}$$

18. 【정답】 ②

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x^2 + 1) + ax + b \text{라 하면}$$

$$f(1) = a + b = 1$$

$$f(2) = 2a + b = 2$$

$$a = 1, \quad b = 0$$

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x^2 + 1) + x$$

$xf(x)$ 를 $x + 1$ 로 나눈 나머지는 $-f(-1)$ 이므로

$$f(-1) = (-2)(-3) \times 2 - 1 = 11$$

$$-f(-1) = -11$$

19. 【정답】 ③

$$\text{합격인원은 전체인원의 } \frac{300}{6000} = \frac{1}{20} = 0.05 = 5\% \text{이다.}$$

최저합격점을 p 라 하면

$$P(X \geq p) = 0.05 \text{가 되어야 한다.}$$

$$P\left(Z \geq \frac{p - 55}{20}\right) = 0.05$$

$$\frac{p - 55}{20} = 1.65, \quad p = 1.65 \times 20 + 55 = 33 + 55 = 88$$

20. 【정답】 ①

$A \cup C = C$ 이므로 $C \subset A$ 이다.

$(A - B) \cup C = C$ 이므로 $(A - B) \subset C$ 이다.

$(A - B) \subset C \subset A$ 이므로

$\{1, 2, 3\} \subset C \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 을 만족하는 집합 C 의 개수는 $2^3 = 8$ 개다.