

2016년 제1차 경찰공무원(순경) 수학 해설

01. ②	02. ③	03. ①	04. ③	05. ①	06. ③	07. ①	08. ④	09. ③	10. ②
11. ③	12. ②	13. ②	14. ④	15. ①	16. ③	17. ①	18. ④	19. ④	20. ②

1. 【정답】 ②

$$(3a+4b)\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\right)=9+\frac{3a}{b}+\frac{12b}{a}+4=13+\frac{3a}{b}+\frac{12b}{a}$$

$$\frac{3a}{b}+\frac{12b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{3a}{b}\cdot\frac{12b}{a}}=12\text{이므로 최솟값은 }13+12=25$$

2. 【정답】 ③

나머지정리로부터 $f(1)=3$, $f(2)=7$, $f(3)=13$ 이다.

$$f(6x)=(6x^2-5x+1)Q(x)+ax+b$$

$$f(6x)=(2x-1)(3x-1)Q(x)+ax+b$$

$$x=\frac{1}{2}\text{을 대입하면 }f(3)=\frac{a}{2}+b=13$$

$$x=\frac{1}{3}\text{을 대입하면 }f(2)=\frac{a}{3}+b=7$$

$$a+2b=26$$

$$a+3b=21$$

$$b=-5, a=36$$

$$a-b=36-(-5)=41$$

3. 【정답】 ①

1) $x \geq 1$ 일 때

$$x^2-2x-2 > 2x-2$$

$$x^2-4x > 0, x(x-4) > 0$$

$$x < 0 \text{ 또는 } x > 4$$

최종 해는 $x > 4$

2) $x < 1$ 일 때

$$x^2-2x-2 > -2x+2$$

$$x^2-4 > 0, (x-2)(x+2) > 0$$

$$x < -2 \text{ 또는 } x > 2$$

최종 해는 $x < -2$

따라서 이차부등식은 $a(x-4)(x+2) > 0$ 의 형태로 놓을 수 있다.

$$ax^2-2x+b=ax^2-2ax-8$$

$$a=1, b=-8$$

$$a+b=1-8=-7$$

4. 【정답】 ③

$$\alpha^2 - 9\alpha + 1 = 0, \beta^2 - 9\beta + 1 = 0$$

$$\alpha^2 + 1 = 9\alpha, \beta^2 + 1 = 9\beta$$

$$\sqrt{\alpha^2 + 1} + \sqrt{\beta^2 + 1} = \sqrt{9\alpha} + \sqrt{9\beta} = 3(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})$$

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = 9 + 2 = 11$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{11}$$

$$\sqrt{\alpha^2 + 1} + \sqrt{\beta^2 + 1} = 3(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) = 3\sqrt{11}$$

5. 【정답】 ①

$$y = -5x + 5, y = mx - 2m + 1$$

$$-5x + 5 = mx - 2m + 1$$

$$(m+5)x = 2m+4$$

$$x = \frac{2(m+2)}{m+5} > 0$$

$$2(m+2)(m+5) > 0, m < -5 \text{ 또는 } m > -2$$

$$y = -5 \cdot \frac{2(m+2)}{m+5} + 5 = \frac{-10m - 20 + 5m + 25}{m+5} = \frac{-5(m-1)}{m+5} > 0$$

$$(m-1)(m+5) < 0, -5 < m < 1$$

따라서 공통범위는 $-2 < m < 1$

6. 【정답】 ③

$P(a, b)$ 와 $(4, 3)$ 사이의 거리가 최소일 때 $\sqrt{(a-4)^2 + (b-3)^2}$ 의 최솟값을 갖는다.

중심 $(0, 0)$ 과 $(4, 3)$ 사이의 거리는 $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ 이므로 최솟값은 반지름의 길이를 뺀 $5 - 1 = 4$ 이다.

7. 【정답】 ①

$$(f \circ f)(x) = ||x-2|-2| = 1$$

$$|x-2|-2 = \pm 1$$

$$|x-2| = 2 \pm 1 = 3, 1$$

$$x = 2 \pm 3, 2 \pm 1$$

$$x = 5, -1, 3, 1$$

$$5 - 1 + 3 + 1 = 8$$

8. 【정답】 ④

$$a_1 = S_1 = 1^3 - 1 + 2 = 2$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^3 - n + 2 - ((n-1)^3 - (n-1) + 2)$$

$$a_n = (n - (n-1))(n^2 + n(n-1) + (n-1)^2) - 1$$

$$a_n = 3n^2 - 3n = 3n(n-1) \quad (n \geq 2)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{10} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

9. 【정답】 ③

$(abc)^n = 3^{\frac{n}{6}} \cdot 7^{\frac{n}{5}} \cdot 11^{\frac{n}{4}}$ 이므로 자연수가 되기 위한 n 의 최솟값은 4, 5, 6의 최소공배수인 60이 된다.

10. 【정답】 ②

$$A = \frac{1}{2} \log_3 2 + 3, \quad B = 2 + \log_2 3 + \log_3 2$$

$$C = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

A, B, C 의 정수부분은 모두 3이므로 소수부분의 크기를 비교하면 된다.

A 의 소수부분은 $\frac{1}{2} \log_3 2$, B 의 소수부분은 $\log_2 3 + \log_3 2 - 1$, C 의 소수부분은 $\frac{1}{2}$ 이다.

$$\frac{1}{2} \log_3 2 < \frac{1}{2} \text{ 이므로 } A < C$$

$$\log_2 3 + \log_3 2 - 1 - \frac{1}{2} = \log_2 \frac{3}{2} + \log_3 \frac{2}{\sqrt{3}} > 0 \text{ 이므로 } B > C \text{ 이다.}$$

$$A < C < B$$

11. 【정답】 ③

양변에 역수를 취하면

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 3}{3a_n} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{3}$$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 공차가 $\frac{1}{3}$ 인 등차수열이다.

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} + (n-1)\frac{1}{3} = \frac{1}{3}n + \frac{1}{6} = \frac{2n+1}{6}$$

$$a_n = \frac{6}{2n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{2n+1} = 3$$

12. 【정답】 ②

㉠ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = l_1$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = l_2$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이다. 따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ 이다.

㉡ $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ 이고 $b_n = -\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$ 이면 $l_3 = 1$, $l_4 = \frac{3}{2}$ 이지만

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = -\frac{1}{2} \neq l_4 - l_3 = \frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

㉢ $a_n = b_n = 1$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 2 \neq 0$ 이지만 무한급수는 둘다 수렴하지 않는다.

13. 【정답】 ②

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - bx - 2}{x + 2} = a$$

$$(-2)^2 + 2b - 2 = 0, \quad b = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-1)}{x+2} = -3$$

$$a = -3$$

$$ab^2 = (-3) \times (-1)^2 = -3$$

14. 【정답】 ④

$$f'(t) = g'(t)$$

$$2t + 3 = 4t - 7$$

$$2t = 10, \quad t = 5$$

$$f(5) = 5^2 + 3 \cdot 5 = 40, \quad g(5) = 2 \cdot 5^2 - 7 \cdot 5 = 15$$

$$40 - 15 = 25$$

15. 【정답】 ①

양변을 미분하면

$$2f(x) = f'(x) + f(x) + xf'(x) - 1$$

$$f(x) = f'(x)(x+1) - 1$$

$$f(1) = 2f'(1) - 1 = 3, \quad f'(1) = 2$$

$$f(x) = 2(x+1) - 1 = 2x + 1$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

16. 【정답】 ③

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c, \quad f'(x) = 4ax^3 + 2bx$$

$$f'(1) = 4a + 2b = 0, \quad b = -2a$$

$$f(0) = c = -3$$

$$\int_0^1 (ax^4 - 2ax^2 - 3) dx = 4$$

$$\left[\frac{a}{5} x^5 - \frac{2a}{3} x^3 - 3x \right]_0^1 = \frac{a}{5} - \frac{2a}{3} - 3 = 4, \quad 3a - 10a - 45 = 60$$

$$-7a = 105, \quad a = -15$$

$$f(x) = -15x^4 + 30x^2 - 3$$

$$f(1) = -15 + 30 - 3 = 12$$

17. 【정답】 ①

0101010101010101010

‘O’지점에 칸막이를 2개 넣어 x, y, z 를 결정하면 되므로

11개의 O 중 칸막이가 들어갈 2개를 선택하는 경우의 수와 같다.

$${}_{11}C_2 = \frac{11 \cdot 10}{2 \cdot 1} = 55$$

18. 【정답】 ④

모음은 O, I, E의 3개이므로

$$1 - \frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} = 1 - \frac{3}{15} = \frac{4}{5}$$

19. 【정답】 ④

확률변수 X 는 정규분포 $N(20, 4^2)$ 을 따른다.

확률변수 Y 는 정규분포 $N(45, 6^2)$ 을 따른다.

확률변수 W 는 정규분포 $N(80, 8^2)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \textcircled{7} \quad P\left(\left|\frac{X}{100} - \frac{1}{5}\right| < \frac{1}{10}\right) &= P(|X - 20| < 10) = P(10 < X < 30) \\ &= P(-2.5 < Z < 2.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{W}{400} - \frac{1}{5}\right| < \frac{1}{10}\right) &= P(|W - 80| < 40) = P(40 < W < 120) \\ &= P(-5 < Z < 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{8} \quad P\left(\left|\frac{Y}{225} - \frac{1}{5}\right| < \frac{1}{25}\right) &= P(|Y - 45| < 9) = P(36 < Y < 54) \\ &= P(-1.5 < Z < 1.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{X}{100} - \frac{1}{5}\right| < \frac{1}{10}\right) &= P(|X - 20| < 10) = P(10 < X < 30) \\ &= P(-2.5 < Z < 2.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{9} \quad P\left(\left|\frac{Y}{225} - \frac{1}{5}\right| < \frac{1}{25}\right) &= P(|Y - 45| < 9) = P(36 < Y < 54) \\ &= P(-1.5 < Z < 1.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{W}{400} - \frac{1}{5}\right| < \frac{1}{10}\right) &= P(|W - 80| < 40) = P(40 < W < 120) \\ &= P(-5 < Z < 5) \end{aligned}$$

20. 【정답】 ②

$$\text{신뢰구간의 길이} : 2 \times 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{19.6}{\sqrt{n}} \leq 0.7, \quad \sqrt{n} \geq \frac{19.6}{0.7} = 28$$

$$n \geq 28^2 = 784$$