

2015년 서울시 9급 수학 A책형 해설

01. 정답없음 02. ② 03. ② 04. ③ 05. ② 06. ④ 07. ② 08. ① 09. ④ 10. ③
 11. ③ 12. ② 13. ① 14. ③ 15. ③ 16. ③ 17. ① 18. ① 19. ① 20. ④

1. 【정답】 정답없음

① 이 : 직사각형이 아니면 두 대각선의 길이가 같지 않다. (거짓)

반례 : 등변사다리꼴은 두 대각선의 길이가 같다.

② 역 : $x+y$ 가 실수이면 x, y 도 실수이다. (거짓)

반례 : $x=i, y=-i$ 인 경우 $x+y$ 는 실수이지만 x, y 는 실수가 아니다.

③ 대우 : 무리수가 아니면 무한소수가 아니다. (거짓)

반례 : $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$ 은 무리수가 아니지만 무한소수이다.

④ ' x, y 가 실수'라는 조건이 없으므로 원명제는 참이 아니다. 따라서 대우도 참이 아니다.

(예 : $x=y=i$ 인 경우 $xy=-1 < 0$ 이지만 $|x|+|y|=2, |x+y|=2$ 이므로 원명제는 거짓이다.)

2. 【정답】 ②

모든 실수 x 에 대하여 $-x^2 + (k+2)x - (2k+1) < 0$ 이다.

$$D = (k+2)^2 - 4(2k+1) < 0$$

$$k^2 + 4k + 4 - 8k - 4 = k^2 - 4k < 0$$

$$k(k-4) < 0, 0 < k < 4$$

$k=1, 2, 3$ 3개

3. 【정답】 ②

원의 중심 $(3, 2)$ 와 직선 $2x - y + k = 0$ 사이의 거리가 반지름 $\sqrt{5}$ 보다 작으면 두 점에서 만난다.

$$d = \frac{|2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|4+k|}{\sqrt{5}} < \sqrt{5}$$

$$|4+k| < 5$$

$$-5 < k+4 < 5$$

$$-9 < k < 1$$

따라서 k 의 개수는 $1 - (-9) - 1 = 9$ 개다.

4. 【정답】 ③

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}$$

$$a = 20, \quad b = 30$$

$$a + b = 20 + 30 = 50$$

5. 【정답】 ②

$$a^{100} = p, \quad b^{100} = q \text{라 하면}$$

$$\log p = 47 + \alpha, \quad (0 \leq \alpha < 1)$$

$$\log q = 84 + \beta, \quad (0 \leq \beta < 1)$$

$$\begin{aligned} \log(ab)^{30} &= \log(pq)^{\frac{30}{100}} = 0.3(\log p + \log q) = 0.3(131 + \alpha + \beta) \\ &= 39.3 + 0.3(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

따라서 40자리 수이다.

6. 【정답】 ④

$$\sin \theta = \frac{4}{5}, \quad \cos \theta = -\frac{3}{5}, \quad \tan \theta = -\frac{4}{3}$$

$$\text{㉠. } \cos \theta \cdot \tan \theta = \sin \theta = \frac{4}{5}$$

$$\text{㉡. } \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\text{㉢. } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta = \frac{4}{5}$$

7. 【정답】 ②

$$y = x^3 - 3x^2 - a + 4 \text{라 하면}$$

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

따라서 $x = 0$ 에서 극대, $x = 2$ 에서 극소이다.

극댓값이 0보다 크고, 극솟값이 0보다 작으면 방정식은 서로 다른 두 개의 양근과 하나의 음근을 갖는다.

$$\text{극댓값 : } -a + 4 > 0$$

$$\text{극솟값 : } 8 - 12 - a + 4 = -a < 0$$

$$0 < a < 4 \quad a = 1, 2, 3$$

$$1 + 2 + 3 = 6$$

8. 【정답】 ①

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{2k}{n}\right) \frac{2}{n} &= \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{2k}{n}\right) \frac{2}{n} = \frac{3}{2} \int_1^3 (3x^2 - 6x) dx \\ &= \frac{3}{2} [x^3 - 3x^2]_1^3 = \frac{3}{2} \times (26 - 24) = 3 \end{aligned}$$

9. 【정답】 ④

$$a_n = \sum_{r=0}^n {}_nC_r \left(\frac{1}{4}\right)^r = \sum_{r=0}^n {}_nC_r 1^{n-r} \left(\frac{1}{4}\right)^r = \left(\frac{5}{4}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{\frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{5}} = 4$$

10. 【정답】 ③

임의추출의 확률변수 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(100, \frac{10^2}{16}\right) = N(100, 2.5^2)$ 을 따른다.

$$P(\bar{X} \geq 95) = P\left(Z \geq \frac{95 - 100}{2.5}\right) = P(Z \geq -2) = 0.5 + 0.48 = 0.98$$

11. 【정답】 ③

$$2x^5 + ax^4 + bx + 1 = (2x - 1)(x^4 - 1) = 2x^5 - x^4 - 2x + 1$$

$$a = -1, \quad b = -2$$

$$\frac{a}{b} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

12. 【정답】 ②

$$a^3 - b^3 = 14, (ab)^3 = 1 \text{ 이므로 } ab = 1$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$$

$$14 = (a - b)^3 + 3(a - b)$$

$$(a - b)((a - b)^2 + 3) = 14 = 2 \cdot (2^2 + 3)$$

$$a - b = 2$$

13. 【정답】 ①

$$2x^2 = \sqrt{\frac{x}{2}}, 4x^4 = \frac{x}{2}$$

$$8x^3 = 1, (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

따라서 교점은 $(0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이다.

두 점 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

14. 【정답】 ③

$$8x - 16 \neq 0, x \neq 2$$

$$x(x - 7) + 10 = 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5) = 0$$

따라서 $x = 5$ 이다.

15. 【정답】 ③

$$a_{21} - a_6 = 15d = -22 - 8 = -30$$

$$d = -2$$

$$a_n = -2n + 20$$

따라서 $a_{11} = -2$ 에서 처음으로 음이 된다.

16. 【정답】 ③

$S_n = n^2 + 3n$ 이므로 공차 $d = 2$ 이고 첫째항 $S_1 = a_1 = 4$ 인 등차수열이다.

$$a_n = 2n + 2$$

$$a_k a_{k+1} = 2(k+1) \cdot 2(k+2) = 4(k+1)(k+2)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 \frac{40}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^8 \frac{10}{(k+1)(k+2)} = 10 \sum_{k=1}^8 \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= 10 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) = 5 - 1 = 4 \end{aligned}$$

17. 【정답】 ①

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3a_n - \frac{12n+3}{2n+5} \right) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6a_n - 6n}{na_n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6\frac{a_n}{n} - 6}{a_n + \frac{3}{n}} = \frac{-6}{2} = -3$$

18. 【정답】 ①

주어진 함수는 감소함수이므로 모든 실수 x 에 대해 $f'(x) \leq 0$ 이다.

$$f'(x) = -3x^2 + 4x + k \leq 0$$

$$3x^2 - 4x - k \geq 0$$

$$\frac{D}{4} = 2^2 + 3k \leq 0$$

$$k \leq -\frac{4}{3} \quad \text{따라서 정수 } k \text{의 최댓값은 } -2 \text{이다.}$$

19. 【정답】 ①

A, B, C, D 네 사람 모두 적어도 한 장 이상씩 가지고 있으므로 50,000원 4장을 분배하면 된다.

1) $(C, D) = (1, 1)$ 인 경우

4장의 50,000원을 A와 B에 나누어주면 되므로 경우의 수는 5가지이다.

2) $(C, D) = (2, 2)$ 인 경우

2장의 50,000원을 A와 B에 나누어주면 되므로 경우의 수는 3가지이다.

3) $(C, D) = (3, 3)$ 인 경우

0장의 50,000원을 A와 B에 나누어주면 되므로 경우의 수는 1가지이다.

$$5 + 3 + 1 = 9 \text{가지}$$

20. 【정답】 ④

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 0.1$$

$$P(A \cup B) = 0.9$$

$$P(A \cap B) = 0.9 - 0.3 - 0.4 = 0.2$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.4 + 0.2} = \frac{1}{3}$$