

2017년 국가직 7급 자동제어 가책형 해설

01. ②	02. ②	03. ①	04. ③	05. ③	06. ③	07. ④	08. ④	09. ①	10. ①
11. ④	12. ①	13. ③	14. ③	15. ④	16. ③	17. ①	18. ②	19. ③	20. ①

1. 【정답】 ②

$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 \text{이므로}$$

$$\ddot{x}_1 = ax_1 + bu, \quad \ddot{y} = ay + bu$$

라플라스변환하면 $s^2 Y = aY + bU$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{s^2 - a}$$

2. 【정답】 ②

$$Y = ((R - Y)k - bsY) \frac{1}{s^2}$$

$$\left(1 + \frac{k}{s^2} + \frac{b}{s}\right) Y = \frac{k}{s^2} R$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^2 + bs + k}$$

3. 【정답】 ①

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+4 & -4 \\ 2 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} U = \frac{1}{s^2 + 4s + 8} \begin{bmatrix} s & 4 \\ -2 & s+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} U$$

$$Y(s) = X_1(s) = \frac{8}{s^2 + 4s + 8} U(s) = \frac{8}{s(s^2 + 4s + 8)}$$

$$\text{부분분수 분해하면 } Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{-s-4}{s^2 + 4s + 8} = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+2)^2 + 4} - \frac{2}{(s+2)^2 + 4}$$

$$\text{라플라스 역변환하면 } y(t) = 1 - e^{-2t}(\cos(2t) + \sin(2t))$$

4. 【정답】 ③

① 주어진 미분방정식을 라플라스 변환하면 $sX + 20X = 20R$

따라서 시스템의 전달함수 $\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{20}{s+20}$ 이다.

② 주어진 시스템은 선형시스템이므로 크기가 유한한(bounded) 입력신호에 대하여 이 시스템의 출력신호는 유한하다.

③ 주파수응답을 살펴보면 $\frac{X(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{20}{j\omega + 20}$ 이고, 이득 $\left| \frac{X(j\omega)}{R(j\omega)} \right| = \frac{20}{\sqrt{\omega^2 + 20^2}}$ 이므로

주파수 ω 가 커짐에 따라 이득은 감소하는 것을 알 수 있다. 따라서 저주파의 신호는 잘 통과시키고 고주파의 신호는 잘 통과하지 못하므로 저역통과필터(low-pass filter)임을 알 수 있다.

(저역통과필터는 $\frac{a}{s+a}$, 고역통과필터는 $\frac{s}{s+a}$ 의 전달함수 형태를 가진다.)

④ 정상상태 출력 $x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{20}{s+20} = 1$ 이다.

5. 【정답】 ③

①, ② 특성방정식 $s(s+2)^2 + K(s+6) = 0$, $s^3 + 4s^2 + (K+4)s + 6K = 0$ 이므로 Routh-Hurwitz 판별법을 쓰면

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & K+4 \\ s^2 & 4 & 6K \\ s^1 & \frac{4(K+4)-6K}{4} & \\ s^0 & 6K & \end{array}$$

$-2K+16 > 0$, $6K > 0$ 이므로 K 의 범위는 $0 < K < 8$ 이다.

③ 페루프 전달함수 $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{s(s+2)^2}}{1 + \frac{K(s+6)}{s(s+2)^2}} = \frac{K}{s(s+2)^2 + K(s+6)}$ 이므로

$$\text{오차 } E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) \left(1 - \frac{K}{s(s+2)^2 + K(s+6)} \right)$$

단위 계단(unit step) 입력에 대한 정상상태오차

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(1 - \frac{K}{s(s+2)^2 + K(s+6)} \right) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \text{이다.}$$

④ 단위 경사(unit ramp) 입력에 대한 정상상태 오차

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(1 - \frac{K}{s(s+2)^2 + K(s+6)} \right) = \infty \text{이다.}$$

6. 【정답】 ③

‘그림과 같은 나이퀴스트(Nyquist) 선도를 갖는 시스템’은 폐루프 전달함수의 나이퀴스트 선도로 해석하여야 한다. 문제의 출제의도는 개루프 전달함수가 아니라 폐루프 전달함수로 해석하는 것이다. (정답 이의제기 하였으나 받아들여지지 않음)

그림의 나이퀴스트(Nyquist) 선도로부터 시스템의 폐루프 전달함수가

$G(s) = \frac{4}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)}$ 의 형태를 갖는 것을 알 수 있다. 따라서 단위 계단

입력에 대한 정상상태 출력은 $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \cdot s \cdot \frac{4}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)} = 4$ 이다.

7. 【정답】 ④

근궤적으로부터 극점은 0, -1이고 영점은 1임을 알 수 있다.

또한 실수축 상의 근궤적을 살펴볼 때 실수축상의 어느 지점의 오른쪽에 있는 극점과 영점을 합한 수가 홀수가 아닌 짝수일 때 실수축 상의 근궤적이 되는 것을 알 수 있으므로 양의 제어이득 K 에 음수가 곱해져야함을 알 수 있다.

따라서 보기 중에서는 $\frac{s-1}{s(s+1)}$ 에 음수 -1이 곱해진 $\frac{-s+1}{s(s+1)}$ 이 $G(s)$ 가 된다.

8. 【정답】 ④

$$j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)+K(j\omega+4)=0$$

$$\text{정리하면 } (-3\omega^2+4K)+j\omega(-\omega^2+K+2)=0$$

$$3\omega^2=4K, \omega^2=K+2 \text{이므로}$$

$$3(K+2)=4K, K=6$$

$$\text{이때 } \omega^2=8 \text{이므로 } \omega=\pm j2\sqrt{2}$$

9. 【정답】 ①

$$Y=(-Y-NG_d)\frac{5}{s(s+5)}+N$$

$$\left(1+\frac{5}{s(s+5)}\right)Y=N\left(1-\frac{5G_d}{s(s+5)}\right)$$

$$1-\frac{5G_d}{s(s+5)}=0 \text{이면 } N(s) \text{의 영향이 출력 } Y(s) \text{에서 완전히 제거된다.}$$

$$G_d(s)=\frac{s(s+5)}{5}$$

10. 【정답】 ①

$H(j\omega) = \frac{1+j\omega\alpha T}{1+j\omega T}$ 이므로 진상보상기의 위상 Φ 는

$$\Phi = \tan^{-1}\omega\alpha T - \tan^{-1}\omega T$$

ω 에 대해 미분하면

$$\frac{d\Phi}{d\omega} = \frac{\alpha T}{1+(\omega\alpha T)^2} - \frac{T}{1+(\omega T)^2} = 0 \text{을 만족하는 } \omega_m \text{가 위상이 최대가 되는 주파수가 된다.}$$

$$1+(\omega\alpha T)^2 = \alpha(1+(\omega T)^2)$$

$$\alpha T^2(\alpha-1)\omega^2 = \alpha-1$$

따라서 위상이 최대가 되는 주파수 $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha} T}$ 이고

이때 위상값은 $H(j\omega_m) = \frac{1+j\sqrt{\alpha}}{1+j\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}$ 이다.

$\tan\theta_1 = \sqrt{\alpha}$, $\tan\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ 라 하면 위상값 $\Phi_m = \theta_1 - \theta_2$ 이므로

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\sqrt{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}}{1 + \sqrt{\alpha} \times \frac{1}{\sqrt{\alpha}}} = \frac{\alpha-1}{2\sqrt{\alpha}}, \quad \Phi_m = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha-1}{2\sqrt{\alpha}}\right)$$

밑변 $2\sqrt{\alpha}$, 높이 $\alpha-1$ 인 직각삼각형을 생각하면 빗변의 길이는 $\alpha+1$ 이므로

$$\sin\Phi_m = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}, \quad \Phi_m = \sin^{-1}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)$$

11. 【정답】 ④

① 실수축 상에 있는 극점이 0, -4이므로 실수축에서의 근궤적은 $s=0$ 과 $s=-4$ 사이에 서만 존재한다.

② $s^2+8s+32=0$ 에서 $s=-4\pm j4$ 이므로

$$\text{점근선은 실수축과 } \sigma_a = \frac{0+(-4)+(-4+j4)+(-4-j4)}{4-0} = -3 \text{에서 만난다.}$$

③ 점근선이 실수축과 만나는 각도 $\theta_a = \frac{(2k+1)}{4-0} \times 180^\circ$, $k=0, 1, 2, 3$ 이므로

점근선의 개수는 4개이고, 각도 $\theta_a = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$ 이므로

각도는 $\pm 45^\circ, \pm 135^\circ$ 로 간단히 나타낼 수 있다.

④ 복소극점 $s=-4+j4$ 에서의 근궤적의 출발각을 θ 라 하면

$$-\theta - 135^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ, \quad \theta = -135^\circ \text{이다.}$$

12. 【정답】 ①

$$f(t) = 5u(t) - 3u(t-1) + 3u(t-3) - 5u(t-4)$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{5}{s} - \frac{3}{s}e^{-s} + \frac{3}{s}e^{-3s} - \frac{5}{s}e^{-4s} = \frac{1}{s}(5 - 3e^{-s} + 3e^{-3s} - 5e^{-4s})$$

13. 【정답】 ③

9의 피드백 전달함수부터 간단히 하면

$$\frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s} \cdot 9} = \frac{1}{s+9}$$

$$\frac{\frac{1}{s+9} \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s+9} \cdot \frac{1}{s} \cdot 24} = \frac{1}{s(s+9)+24}$$

$$\frac{\frac{1}{s(s+9)+24} \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s(s+9)+24} \cdot \frac{1}{s} \cdot 26} = \frac{1}{s(s(s+9)+24)+26}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{16}{s(s(s+9)+24)+26} = \frac{16}{s^3+9s^2+24s+26}$$

14. 【정답】 ③

$\omega = 0.001$ 일 때 $20\log|G(j\omega)| = 20$ 이므로 $\omega \leq 0.001$ 에서 $G(s) = 10$ 이다.

$\omega = 0.01$ 일 때 기울기가 -20 이 되므로 $1 + \frac{s}{0.01}$ 이 전달함수의 분모에 들어간다.

$\omega = 0.1$ 일 때 기울기가 0 이 되므로 $1 + \frac{s}{0.1}$ 이 전달함수의 분자에 들어간다.

$\omega = 1$ 일 때 기울기가 20 이 되므로 $1 + s$ 이 전달함수의 분자에 들어간다.

$\omega = 10$ 일 때 기울기가 0 이 되므로 $1 + \frac{s}{10}$ 이 전달함수의 분모에 들어간다.

$$\frac{10\left(1 + \frac{s}{0.1}\right)(1+s)}{\left(1 + \frac{s}{0.01}\right)\left(1 + \frac{s}{10}\right)} = \frac{10(s+0.1)(s+1)}{(s+0.01)(s+10)}$$

15. 【정답】 ④

$$\text{페루프 전달함수 } K_1 \cdot \frac{\frac{K_2 + K_3 s}{s^2 - s - 1}}{1 + \frac{K_2 + K_3 s}{s^2 - s - 1}} = \frac{K_1(K_2 + K_3 s)}{s^2 + (K_3 - 1)s + K_2 - 1}$$

극점 $s = -1 + j$ 에서 특성방정식 $s^2 + 2s + 2 = 0$ 이므로 $K_2 = 3, K_3 = 3$

단위 계단(unit step) 입력에 대한 정상상태오차가 0이려면 정상상태출력은 1이어야 한다.

$$\text{정상상태 출력 } y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{K_1(3 + 3s)}{s^2 + 2s + 2} = \frac{3K_1}{2} = 1, K_1 = \frac{2}{3}$$

16. 【정답】 ③

$$\alpha = \left| \frac{1}{-\frac{3}{4}} \right| = \frac{4}{3}, \beta = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 30^\circ$$

$$\alpha\beta = \frac{4}{3} \times 30 = 40$$

17. 【정답】 ①

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} (-[k_1 \ k_2] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix})$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ bk_1 & bk_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a - bk_1 & -bk_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a - bk_1 & -bk_2 \end{bmatrix}$ 라 하면 시스템의 특성방정식은 $\det(sI - A) = 0$ 이다.

$$\det(sI - A) = s^2 + bk_2s - a + bk_1 = 0$$

$$\text{정착시간(settling time)으로부터 } \frac{4}{\frac{bk_2}{2}} = 0.5, bk_2 = 16, k_2 = \frac{16}{b}$$

$$\text{감쇠비로부터 } \frac{bk_2}{2\sqrt{-a + bk_1}} = 0.8, \frac{16}{2\sqrt{-a + bk_1}} = 0.8, k_1 = \frac{100 + a}{b}$$

18. 【정답】 ②

문제의 시간응답 그래프로부터 정상상태 출력은 0.5이므로 정상상태 출력이 1인 ③번과 ④번은 정답이 될 수 없다.

또한 문제의 시간응답은 언더슈트가 발생하므로 s 평면 우반부에 영점이 존재하여야한다. 따라서 정상상태 출력이 0.5이고, 우반부에 영점이 존재하는 ②번 $\frac{1-s}{s^2+s+2}$ 가 시스템의 전달함수로 가장 적합하다.

19. 【정답】 ③

전달함수를 간단히 하면

$$Y = (R - Y - 2sY) \frac{10}{s+1} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\left(1 + \frac{10}{s(s+1)} + \frac{20}{s+1}\right) Y = \frac{10}{s(s+1)} R$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^2 + 21s + 10}$$

$$\text{위상변수형(가제어성표준형)} : \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -21 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [10 \ 0] x(t)$$

$$\text{제어기표준형} : \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -21 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [0 \ 10] x(t)$$

$$\text{관측기표준형} : \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -21 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [1 \ 0] x(t)$$

보기 중 해당하는 것은 ③번 제어기표준형이다.

20. 【정답】 ①

$$T(s) = \frac{K}{(s^2 + 20s + 200)(s + a)} = \frac{K}{s^3 + (a + 20)s^2 + (20a + 200)s + 200a}$$

$$T(s) = \frac{\frac{K}{s^3 + (a + 20)s^2 + (20a + 200)s}}{1 + \frac{200a}{s^3 + (a + 20)s^2 + (20a + 200)s}} \text{이므로}$$

$$\text{전방경로 전달함수 } G(s) = \frac{200a}{s^3 + (a + 20)s^2 + (20a + 200)s} \text{이고, } K = 200a \text{임을 알 수 있다.}$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{200a}{s^2 + (a + 20)s + 20a + 200} = \frac{200a}{20a + 200} = 5$$

$$a = 10, \quad K = 200 \times 10 = 2000$$