2016년 국가직 7급 자동제어 2책형 해설

01. ④	02. ③	03. ②	04. ④	05. ①	06. ③	07. ②	08. ④	09. ②	10. ②
11. ①	12. ①	13. ④	14. ②	15. ④	16. ③	17. ①	18. ①	19. ②	20. ②

1.【정답】④
시간응답은 비선형시스템에서도 존재한다.

2.【정답】③
페루프 전달함수 $\dfrac{\dfrac{K}{s(s+4)}}{1+\dfrac{K}{s(s+4)}}=\dfrac{K}{s(s+4)+K}$이므로 $\omega_n=\sqrt{K}$이다.

$2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{K}=4,\ K=8$

3.【정답】②
$A=\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$라 하면 시스템의 특성방정식은 $\det(sI-A)=0$이다.

$\det(sI-A)=s^2-(a-2)s-2a-b=0$

$s=-1$에서 중복극점을 가지므로 특성방정식 $(s+1)^2=s^2+2s+1=0$이다.

$a-2=-2,\ a=0,\ b=-1$

$a+b=0-1=-1$

4.【정답】④
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(-\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix})$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1-k_1 & -2-k_2 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}r$$

$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1-k_1 & -2-k_2 \end{bmatrix}$라 하면 시스템의 특성방정식은 $\det(sI-A)=0$이다.

$\det(sI-A)=s^2+(2+k_2)s+1+k_1=0$

$s=-2\pm j2$에서 $s^2+4s+4=-4$이므로 $s^2+4s+8=0$이다.

$2+k_2=4,\ 1+k_1=8$

$k_1=7,\ k_2=2$

5. 【정답】 ①

$f(t)=K(y_1(t)-y_2(t))$

$-K(y_2(t)-y_1(t))-B\dfrac{dy_2(t)}{dt}=M\dfrac{d^2y_2(t)}{dt^2}$

$f(t)-B\dfrac{dy_2(t)}{dt}=M\dfrac{d^2y_2(t)}{dt^2}$

$M\dfrac{d^2y_2(t)}{dt^2}+B\dfrac{dy_2(t)}{dt}=f(t)$

라플라스변환하면 $Ms^2Y_2(s)+BsY_2(s)=F(s)$

$\dfrac{Y_2(s)}{F(s)}=\dfrac{1}{Ms^2+Bs}=\dfrac{1}{5s^2+10s}=\dfrac{1}{5s(s+2)}$이므로 극점은 $s=0$, $s=-2$이다.

6. 【정답】 ③

$B=\begin{bmatrix}1\\b\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}-1&2\\0&1\end{bmatrix}$

$AB=\begin{bmatrix}-1+2b\\b\end{bmatrix}$

가제어성 행렬 : $S=\begin{bmatrix}1&-1+2b\\b&b\end{bmatrix}$

$\det S=b-b(-1+2b)\neq 0$

$2b^2-2b=2b(b-1)\neq 0$이므로 $b\neq 0$이고 $b\neq 1$이다.

7. 【정답】 ②

안정한계(marginally stable)일 때의 주파수는 위상교차주파수이다.

$G(j\omega)=\dfrac{K}{j\omega(j\omega+10)(j\omega+20)}=\dfrac{K}{j\omega(-\omega^2+30j\omega+200)}$이므로 위상교차주파수

$\omega_s=\sqrt{200}\ \mathrm{rad/s}$이다. 이때 $G(j\omega)=\dfrac{K}{-6000}$이므로 $|G(j\omega)|=\left|\dfrac{K}{-6000}\right|=1$에서

안정한계일 때의 이득 $K=6000$이다. 따라서 시스템이 안정할 K의 범위는 $0<K<6000$이다.

8.【정답】④

① 위상교차주파수를 ω_p라 하면 $G(j\omega_p) = -0.5$이므로 전달함수 $KG(s)$의 이득여유는

$20\log\dfrac{1}{|KG(j\omega_p)|} = 20\log\dfrac{1}{0.5K}$이므로 K가 증가하면 이득여유는 작아진다.

② $K = 2$인 경우 페루프 전달함수의 특성방정식 $1 + 2G(s) = 0$이므로 극점은 $G(s) = -0.5$를 만족하는 점이다. 나이퀴스트 선도에서 $G(j\omega_p) = -0.5$이므로 허수 $s = \pm j\omega_p$가 극점이 된다.

③ 이득여유 $20\log\dfrac{1}{0.5K} > 0$이면 안정하므로 $\dfrac{1}{0.5K} > 1$, $K < 2$이면 안정하다.

④ $K = 1$인 경우 이득여유 $\dfrac{1}{|KG(j\omega_p)|} = \dfrac{1}{0.5} = 2$이다.

(이득여유를 dB단위로 나타내지 않을 때는 이득여유는 $\dfrac{1}{|G(j\omega_p)|}$이다.)

9.【정답】②

이득 $|G(j\omega)| = \left|\dfrac{1}{(j\omega)^2 + j\omega + 1}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2}}$이므로 출력진폭이 최대가 되기 위해서는 $(1-\omega^2)^2 + \omega^2 = \omega^4 - \omega^2 + 1$이 최솟값을 가져야 한다. $f(\omega) = \omega^4 - \omega^2 + 1$이라 하면 $f'(\omega) = 4\omega^3 - 2\omega = 2\omega(2\omega^2 - 1) = 0$에서 $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$일 때 최솟값

$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{4}$를 가진다. 따라서 최댓값 $A(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{3}{4}}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$이다.

10.【정답】②

$A = \begin{bmatrix} -K & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$라 하면 시스템의 특성방정식은 $\det(sI - A) = 0$이다.

$\det(sI - A) = s^2 + Ks + 12 = 0$

Routh-Hurwitz 판별법을 사용하기 위해 특성방정식을 x축 양의 방향으로 2만큼 평행이동

$(s-2)^2 + K(s-2) + 12 = 0$

$s^2 + (K-4)s + 16 - 2K = 0$

특성방정식의 계수가 모두 양수이면 되므로

$K - 4 > 0$, $16 - 2K > 0$

공통범위는 $4 < K < 8$

11. **【정답】** ①

페루프 전달함수 $\dfrac{\dfrac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2}}{1+\dfrac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}}=\dfrac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+(K+1)\omega_n^2}$이다.

따라서 새로운 고유진동수를 $\omega_n{}'$라 하면 $\omega_n{}'=\sqrt{K+1}\,\omega_n$이고, 새로운 감쇠비를 ζ'라 하면 $\zeta'=\dfrac{2\zeta\omega_n}{2\omega_n{}'}=\dfrac{\zeta}{\sqrt{K+1}}$이다.

① 2% 정착시간(settling time)의 근사식 $t_s=\dfrac{4}{\zeta\omega_n}$이고 새로운 고유진동수와 감쇠비의 곱 $\zeta'\omega_n{}'=\dfrac{\zeta}{\sqrt{K+1}}\times\sqrt{K+1}\,\omega_n=\zeta\omega_n$은 이전과 같으므로 2% 정착시간이 비례제어의 영향이 가장 적게 나타나는 성능지수이다.

12. **【정답】** ①

$\omega\le 2$일 때 $20\log|G(j\omega)|=20$이므로 $\omega\le 2$에서 $G(s)=10$이다.

$\omega=2$일 때 기울기가 $+20$이 되므로 $1+\dfrac{s}{2}$이 전달함수의 분자에 들어간다.

$\omega=20$일 때 기울기가 0이 되므로 $1+\dfrac{s}{20}$이 전달함수의 분모에 들어간다.

$\omega=100$일 때 기울기가 -20이 되므로 $1+\dfrac{s}{100}$이 전달함수의 분모에 들어간다.

$$G(s)=\frac{10\left(1+\dfrac{s}{2}\right)}{\left(1+\dfrac{s}{20}\right)\left(1+\dfrac{s}{100}\right)}=\frac{10^4(2+s)}{(20+s)(100+s)}$$

13. **【정답】** ④

④ 실수축상의 근궤적은 임의의 구간에서 우측에 있는 실수축상의 개루프 극점과 영점의 개수가 홀수이면 그 구간에서 근궤적이 존재한다.

14. **【정답】** ②

문제의 조건에서 위상교차주파수 $\omega_p=0$이므로 $G(j\omega_p)=\dfrac{K}{a}$이다.

따라서 이득여유 $20\log\left|\dfrac{1}{G(j\omega_p)}\right|=20\log\dfrac{a}{K}=40$

$\dfrac{a}{K}=100,\ K=0.01a$

15. **【정답】** ④

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$라 하면 $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

양변을 라플라스변환하면

$$sX = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U$$

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s-2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U$$

$$X = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U = \frac{1}{s^2-2s+1} \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U = \frac{1}{s^2-2s+1} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} U$$

$Y = \frac{1}{s^2-2s+1} [0\ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} U = \frac{s}{s^2-2s+1} U$이므로 $G = \frac{s}{s^2-2s+1}$이다.

폐루프 전달함수는 $\dfrac{\dfrac{Ks}{s^2-2s+1}}{1+\dfrac{Ks}{s^2-2s+1}} = \dfrac{Ks}{s^2+(K-2)s+1}$이다.

특성방정식 $s^2+(K-2)s+1=0$이고 피드백 제어시스템의 모든 극점의 실수부가 0보다 작기 위한 조건은 시스템이 안정할 조건과 같다.

특성방정식의 계수가 모두 양수이면 안정하므로

$K-2>0,\ K>2$

16. **【정답】** ③

정상상태 출력 $y(\infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot \dfrac{1}{s} \cdot \dfrac{\dfrac{2}{s+1}}{1+\dfrac{2K}{s+1}} = \dfrac{2}{1+2K}$이다.

정상상태 오차가 ± 0.2가 되려면 정상상태 출력이 $0.8 < \dfrac{2}{1+2K} < 1.2$범위에 있어야 한다.

부등식을 풀면 $\dfrac{1}{3} \le K \le \dfrac{3}{4}$

17. **【정답】** ①

$G(0j) = \dfrac{c}{b} = 1.5$

$G(j\sqrt{2}) = \dfrac{c}{-2+j\sqrt{2}a+b}$에서 실수부가 0이므로 $b=2$이고, $c=1.5b=3$이다.

$G(j\sqrt{2}) = \dfrac{3}{j\sqrt{2}a} = -j\dfrac{3\sqrt{2}}{4},\ a=2$

18. 【정답】 ①

$\omega \le 10^{-1}$일 때 $20\log|G(j\omega)| = 20$이므로 $\omega \le 10^{-1}$에서 $G(s) = 10$이다.

$\omega = 10^{-1}$일 때 기울기가 -20이 되므로 $1 + \dfrac{s}{10^{-1}}$이 전달함수의 분모에 들어간다.

$$G(s) = \frac{10}{1+\dfrac{s}{10^{-1}}} = \frac{10}{1+10s}$$

단위계단 입력에 대한 정상상태오차

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+\dfrac{10}{1+10s}} = \frac{1}{11}$$

19. 【정답】 ②

$$Y = (R-Y)\frac{K_1}{s}\left(K_2 + \frac{K_3}{s}\right)$$

$$\left(1+\frac{K_1}{s}\left(K_2+\frac{K_3}{s}\right)\right)Y = R\frac{K_1}{s}\left(K_2+\frac{K_3}{s}\right)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{K_1}{s}\left(K_2+\dfrac{K_3}{s}\right)}{1+\dfrac{K_1}{s}\left(K_2+\dfrac{K_3}{s}\right)} = \frac{K_1(K_2 s + K_3)}{s^2 + K_1K_2 s + K_1K_3}$$

20. 【정답】 ②

$\dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2y_1$에 $y_1 = C_1x_1 + D_1u$를 대입하면

$\dot{x}_2 = B_2C_1x_1 + A_2x_2 + B_2D_1u$

따라서 $\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u$, $\dot{x}_2 = B_2C_1x_1 + A_2x_2 + B_2D_1u$이므로

$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_1 & 0\\ B_2C_1 & A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B_1\\ B_2D_1\end{bmatrix}u$이다.