

2009년 국가직 7급 자동제어 봉책형 해설

01. ④	02. ②	03. ②	04. ①	05. ②	06. ③	07. ④	08. ④	09. ④	10. ③
11. ③	12. ④	13. ①	14. ③	15. ①	16. ①	17. ①	18. ④	19. ③	20. ②

1. 【정답】 ④

① 미분방정식을 라플라스변환하면 $s^2 Y + 5s Y + 6Y = 5R$ 이므로 전달함수

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{5}{s^2 + 5s + 6} \text{이다.}$$

② $5x_1 = y$, $x_2 = \dot{x}_1$ 으로 하는 위상변수형(가제어 표준형)의 상태방정식을 세우면

$$5\ddot{x}_1 + 5 \cdot 5\dot{x}_1 + 6 \cdot 5x_1 = 5r, \quad \ddot{x}_1 + 5\dot{x}_1 + 6x_1 = r$$

$$\dot{x}_2 + 5x_2 + 6x_1 = r, \quad \dot{x}_2 = -6x_1 - 5x_2 + r$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [5 \ 0] x(t)$$

③ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$ 이므로 고유값 $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$

$$(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0, \quad \lambda = -2, -3$$

④ 고유벡터 $Av = \lambda v$ 에서 $\lambda = -2$ 일 때 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2v_1 \\ -2v_2 \end{bmatrix}$ 이므로 $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ 이고,

$$\lambda = -3 \text{일 때 } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3w_1 \\ -3w_2 \end{bmatrix} \text{에서 } w = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \text{이다.}$$

2. 【정답】 ②

① 폐루프 제어 시스템(closed-loop control system)의 특성방정식(characteristic equation)은 $s^2 + 2s + K = 0$ 이다.

② $\omega_n = \sqrt{K}$, $\zeta = \frac{2}{2\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{K}}$ 이므로 K 가 증가할수록 진동은 심해지지만

Routh-Hurwitz 판별법을 쓰면 $K > 0$ 인 범위에 대해 안정하다.

③ 정착시간의 근사식 $T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$ 이므로 계단입력 응답의 정착시간 $T_s = 4$ 로 일정한 값이 된다.

④ $0 < K < 1$ 이면 $\zeta > 1$ 이므로 폐루프 제어 시스템은 과감쇠(overdamping)이고, 이 시스템의 특성방정식의 근 $s = -1 \pm \sqrt{1 - K}$ 이므로 서로 다른 음의 실근을 갖는다.

3. 【정답】 ②

$$\text{페루프 전달함수 } \frac{\frac{1}{(s+1)(s+3)}}{1 + \frac{1}{(s+1)(s+3)}} = \frac{1}{(s+1)(s+3)+1} = \frac{1}{s^2+4s+4} = \frac{1}{(s+2)^2}$$

$$\text{입력의 라플라스변환 } R(s) = \frac{1}{s^2} \text{ 이므로 출력 } Y(s) = \frac{1}{s^2(s+2)^2} \text{ 이다.}$$

$$Y(s) = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right) \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s(s+2)} + \frac{1}{(s+2)^2} \right)$$

$$Y(s) = \frac{1}{4} \frac{1}{s^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right) + \frac{1}{4} \frac{1}{(s+2)^2} = -\frac{1}{4} \frac{1}{s} + \frac{1}{4} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{s+2} + \frac{1}{4} \frac{1}{(s+2)^2}$$

역변환하면

$$y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}te^{-2t}, \quad t \geq 0$$

4. 【정답】 ①

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-[k_1 \ k_2]x(t) + pr(t))$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} x(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \ k_2]x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ p \end{bmatrix} r(t)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2-k_1 & 3-k_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ p \end{bmatrix} r(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2-k_1 & 3-k_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ p \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 1] \text{ 라 하면}$$

$$\text{고유값 : } \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + (k_2 - 3)\lambda + k_1 - 2 = 0$$

$$\lambda = -4 \pm j3 \text{ 에서 } \lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0 \text{ 이므로}$$

$$k_2 - 3 = 8, \quad k_2 = 11$$

$$k_1 - 2 = 25, \quad k_1 = 27$$

라플라스변환하면

$$sX = AX + BR, \quad X = (sI - A)^{-1}BR$$

$$Y = C(sI - A)^{-1}BR$$

$$Y = \frac{1}{s^2 + 8s + 25} [1 \ 1] \begin{bmatrix} s+8 & 1 \\ -25 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ p \end{bmatrix} R$$

$$Y = \frac{1}{s^2 + 8s + 25} [1 \ 1] \begin{bmatrix} p \\ ps \end{bmatrix} R$$

$$Y(s) = \frac{p(1+s)}{s^2 + 8s + 25} \cdot \frac{1}{s}$$

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{p(1+s)}{s^2 + 8s + 25} = \frac{p}{25} = 1$$

$$p = 25$$

5. 【정답】 ②

$$\text{정상상태 오차 : } R(s) = \frac{1}{s}, \quad e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{1}{1 + K}$$

$$\text{폐루프 전달함수 } \frac{\frac{K}{Ts+1}}{1 + \frac{K}{Ts+1}} = \frac{K}{Ts+1+K} = \frac{\frac{K}{1+K}}{1 + \frac{T}{1+K}s} \text{이므로 시정수(time constant)}$$

$$\tau = \frac{T}{1+K} \text{이다.}$$

6. 【정답】 ③

$$\text{폐루프 전달함수 } \frac{\frac{K+3s}{s(s+1)^2}}{1 + \frac{K+3s}{s(s+1)^2}} = \frac{K+3s}{s(s+1)^2 + K+3s} \text{이므로}$$

$$\text{특성방정식 } s^3 + 2s^2 + 4s + K = 0 \text{이다.}$$

Routh-Hurwitz 판별법을 쓰면

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 2 & K \\ s^1 & \frac{8-K}{2} & \\ s^0 & K & \end{array}$$

$$8 - K > 0, \quad K > 0$$

$$0 < K < 8$$

7. 【정답】 ④

페루프 전달함수의 특성방정식은 $s(T_1s+1)(T_2s+1)+K(T_d s+1)=0$

$$T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + (1 + K T_d)s + K = 0$$

① 허수축과 만날 때 특성방정식의 근이 순허수를 가지므로

$$-T_1 T_2 j \omega^3 - (T_1 + T_2)\omega^2 + j\omega(1 + K T_d) + K = 0$$

$$K - (T_1 + T_2)\omega^2 + j\omega(1 + K T_d - T_1 T_2 \omega^2) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{K}{T_1 + T_2}, \quad 1 + K T_d - T_1 T_2 \frac{K}{T_1 + T_2} = 0$$

$$K = \frac{1}{\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} - T_d}$$

② Routh-Hurwitz 판별법을 쓰면

$$\begin{array}{ccc} s^3 & T_1 T_2 & 1 + K T_d \\ s^2 & T_1 + T_2 & K \\ s^1 & \frac{(T_1 + T_2)(1 + K T_d) - K T_1 T_2}{T_1 + T_2} & \\ s^0 & K & \end{array}$$

$$(T_d(T_1 + T_2) - T_1 T_2)K + T_1 + T_2 > 0, \quad K > 0$$

$$T_d < \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \text{ 이므로 } K < \frac{-(T_1 + T_2)}{T_d(T_1 + T_2) - T_1 T_2}, \quad K < \frac{1}{\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} - T_d}$$

$$0 < K < \frac{1}{\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} - T_d}$$

③ 루프영점이 없는 경우 안정영역은 $0 < K < \frac{1}{\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}}$ 이므로 안정영역이 더 작아진다.

$$\textcircled{4} (T_d(T_1 + T_2) - T_1 T_2)K + T_1 + T_2 > 0, \quad K > 0$$

$$T_d \geq \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \text{ 이므로 } K > \frac{-(T_1 + T_2)}{T_d(T_1 + T_2) - T_1 T_2}, \quad K > \frac{1}{\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} - T_d}$$

따라서 $K > \frac{1}{\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} - T_d}$ 인 K 에 대해 시스템은 안정하다.

8. 【정답】 ④

① $(s^2 + 3s + 2)Y(s) = 5R(s)$ 에서 역변환하면 $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 5r$

② $x_1 = y, x_2 = \dot{x}_1$ 으로 하는 위상변수형(가제어 표준형)의 상태방정식을 세우면

$$\dot{x}_2 + 3x_2 + 2x_1 = 5r, \quad \dot{x}_1 = -2x_1 - 3x_2 + 5r$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0] x(t)$$

③ 병렬형태이므로

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{5}{s^2 + 3s + 2} = \frac{5}{(s+1)(s+2)} = \frac{5}{s+1} - \frac{5}{s+2}$$

$$Y(s) = \frac{5}{s+1} R(s) - \frac{5}{s+2} R(s)$$

$$\frac{1}{s+1} R(s) = X_1(s) \text{라 하면 } R(s) = (s+1)X_1(s)$$

역변환하면 $r = \dot{x}_1 + x_1$

$$-\frac{1}{s+2} R(s) = X_2(s) \text{라 하면 } -R(s) = (s+2)X_2(s)$$

역변환하면 $-r = \dot{x}_2 + 2x_2$

$$Y(s) = 5X_1(s) + 5X_2(s), \quad y(t) = 5x_1 + 5x_2$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [5 \ 5] x(t)$$

9. 【정답】 ④

폐루프 전달함수 $\frac{\frac{b}{s+a} \cdot \left(K_p + \frac{K_i}{s}\right)}{1 + \frac{b}{s+a} \cdot \left(K_p + \frac{K_i}{s}\right)} = \frac{b(K_p s + K_i)}{s(s+a) + b(K_p s + K_i)}$ 이다.

따라서 특성방정식 $s^2 + (a + bK_p)s + bK_i = 0$ 이다.

폐루프 시스템의 극점 $s = -2a \pm jb$ 이므로 $s^2 + 4as + 4a^2 + b^2 = 0$ 이다.

$$4a = a + bK_p$$

$$4a^2 + b^2 = bK_i$$

$$K_p = \frac{3a}{b}, \quad K_i = \frac{1}{b}(4a^2 + b^2)$$

10. 【정답】 ③

① 실수축과 교차할 때의 주파수를 ω 라 하면 $L(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)}$

$L(j\omega) = \frac{1}{j\omega(-\omega^2+2+3j\omega)}$ 이므로 $\omega = \sqrt{2}$ [rad/sec]이다.

② 위상교차주파수 $\omega = \sqrt{2}$ [rad/sec]이므로 $|L(j\omega)| = \left| \frac{1}{-3 \cdot 2} \right| = \frac{1}{6}$ 이고, 따라서 이득여유(gain margin) $GM = 20\log 6$ 이다.

③ $L(j\omega) = \frac{-3\omega^2 - j\omega(-\omega^2+2)}{9\omega^4 + \omega^2(-\omega^2+2)^2}$ 이므로 $\omega \rightarrow 0$ 일 때 실수부는

$\frac{-3}{9\omega^2 + (-\omega^2+2)^2} = \frac{-3}{4} = -0.75$ 이다. 따라서 점근선은 -0.75 이다.

④ 위상교차주파수에서 $L(j\omega) = -\frac{1}{6}$ 이므로 제어 시스템은 안정하다.

11. 【정답】 ③

③ 피드백 제어는 센서의 해상도(resolution) 이상의 정밀도를 갖도록 제어할 수 없다.

12. 【정답】 ④

폐루프 전달함수 $\frac{\frac{4}{s(s+2)}}{1 + \frac{4}{s(s+2)}} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$ 이다.

① 감쇠비(damping ratio) $\zeta = \frac{2}{2\omega_n} = \frac{1}{2} = 0.5$ 이다.

② 고유주파수(natural frequency)는 $\omega_n^2 = 4$, $\omega_n = 2$ [rad/sec]이다.

③ 감쇠비 $\zeta = 0.5$ 이므로 단위계단응답(unit step response)은 부족감쇠이다.

(지수적으로 단조 증가가 일어나려면 $\zeta > 1$ 이어야 한다.)

④ 감쇠비가 1보다 작은 양수이므로 부족감쇠(underdamping) 시스템이다.

13. 【정답】 ①

$$-a + 2b = 5$$

$$a - b = -4$$

$$b = 1, a = -3$$

14. 【정답】 ③

- ① 개루프 전달함수가 음의 실수축과 만나지 않으므로 이득여유(gain margin)은 ∞ [dB]이고, 주파수 선도가 복소평면상의 $(0, -1)$ 과 만나므로 위상여유(phase margin)는 90° 이다.
- ② 이득여유가 ∞ [dB]이므로 위상교차주파수(phase crossover frequency)는 없고, 주파수 선도가 복소평면상의 $(0, -1)$ 과 만나므로 이득 교차주파수(gain crossover frequency)는 1 [rad/sec]이다.
- ③ 페루프 전달함수 $\frac{1}{1+s}$ 이므로 대역폭(bandwidth)은 1 [rad/sec]이고, 대역폭에서의 이득은 $20\log\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = -10\log 2 = -3.03$ [dB]이다.
- ④ 주어진 시스템은 1차 시스템이므로 공진 주파수(resonant frequency)와 공진 최댓값은 없다.

15. 【정답】 ①

$$Y = ((RG_1 - YH)G_2 + RG_4)G_3$$

$$(1 + G_2G_3H)Y = R(G_3G_4 + G_1G_2G_3)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_3G_4 + G_1G_2G_3}{1 + G_2G_3H}$$

16. 【정답】 ①

$$t_r = \frac{3.2}{\zeta\omega_n} = 1, \quad \omega_n = \frac{3.2}{\zeta} = \frac{3.2}{0.4} = 8$$

페루프 전달함수의 특성방정식은 $s(s + 5 + 100K_t) + K = 0$

$$s^2 + (5 + 100K_t)s + K = 0$$

$$2\zeta\omega_n = 2 \cdot 0.4 \cdot 8 = 6.4 = 5 + 100K_t$$

$$K_t = \frac{1.4}{100} = 0.014$$

$$K = \omega_n^2 = 64$$

17. 【정답】 ①

$$D(j\omega) = \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega aT}$$

이므로 진상보상기의 위상 ϕ_c 는

$$\phi_c = \tan^{-1}\omega T - \tan^{-1}\omega aT$$

ω 에 대해 미분하면

$$\frac{d\phi_c}{d\omega} = \frac{T}{1 + (\omega T)^2} - \frac{aT}{1 + (\omega aT)^2} = 0$$

을 만족하는 ω_c 가 위상이 최대가 되는 주파수가 된다.

$$a(1 + (\omega T)^2) = 1 + (\omega a T)^2$$

$$aT^2(a-1)\omega^2 = a-1$$

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{a} T}$$

18. 【정답】 ④

먼저 $T \geq 0$ 인 경우 주어진 개루프함수의 나이퀴스트 선도가 음의 실수축과 만나지 않으므로 이득여유는 ∞ [dB]이다.

$T < 0$ 인 비최소위상시스템의 경우

이득여유 $20 \log \frac{1}{|G(j\omega)|} > 0$ 이므로 $|G(j\omega)| < 1$ 이어야 한다.

$$G(j\omega) = \frac{10}{(j\omega + 1)(j\omega + T)} = \frac{10}{-\omega^2 + T + (T+1)j\omega}$$

이 음의 실수 값을 가지려면

위상교차주파수 $\omega = 0$ 이다. 이때 $|G(j\omega)| = -\frac{10}{T}$ 이다.

$$-\frac{10}{T} < 1, \quad T < -10$$

최종범위는 $T \geq 0$ 또는 $T < -10$ 이므로 ① ② ③ ④번 모두 정답이 됩니다.

출제오류 문제이지만 정답이 고쳐지지 않았습니다.

19. 【정답】 ③

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (-[1 \ k] x(t) + r(t))$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) - \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1-k \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t)$$

$$CA = [-1 \ 1 - k]$$

$$\text{가관측성 행렬} : V = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1-k \end{bmatrix}$$

$$\det V = 1 - k + 2 = 0, \quad k = 3$$

20. 【정답】 ②

Routh-Hurwitz 판별법을 사용하기 위해 특성방정식을 x 축 양의방향으로 2만큼 평행이동하면

$$(s-2)^2 + (2+K)(s-2) + (3+K) = 0$$

$$s^2 + (K-2)s + (3-K) = 0$$

특성방정식의 계수가 모두 양수이면 되므로

$$K-2 > 0, \quad 3-K > 0$$

$$\text{공통범위는 } 2 < K < 3$$