

수학 영역(가형)

제 2 교시

1

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{3x}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

2. $\cos \frac{13}{6}\pi$ 의 값은? [2점]

- ① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ 의 장축의 길이는? [2점]

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

4. 함수 $y = \log_2 x + 2$ 의 그래프가 점 $(a, 1)$ 을 지날 때, a 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

5. 함수 $f(x) = \frac{1}{x-2}$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -\frac{1}{4}$ 을 만족시키는 양수 a 의 값은? [3점]

- ① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

6. $\int_1^{16} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{7}{6}$

7. 매개변수 $t (t > 0)$ 으로 나타내어진 함수

$$x = t^2 + \ln t, y = t^3 + 6t$$

에서 $t = 1$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

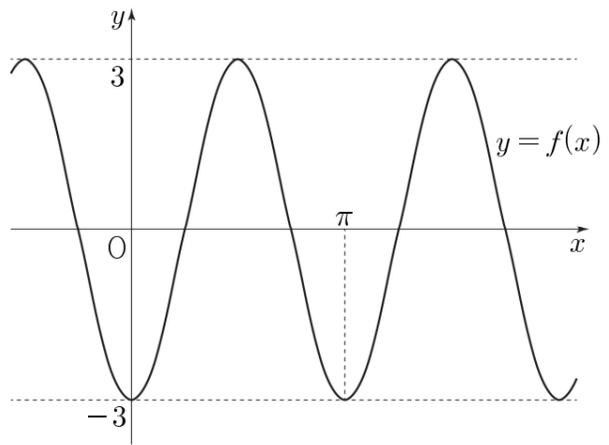
8. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(5x-1) = e^{x^2-1}$ 을 만족시킬 때, $f'(4)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

9. 자연수 7을 같은 자연수가 3개 이상 포함되도록 분할하는 방법의 수는? [3점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

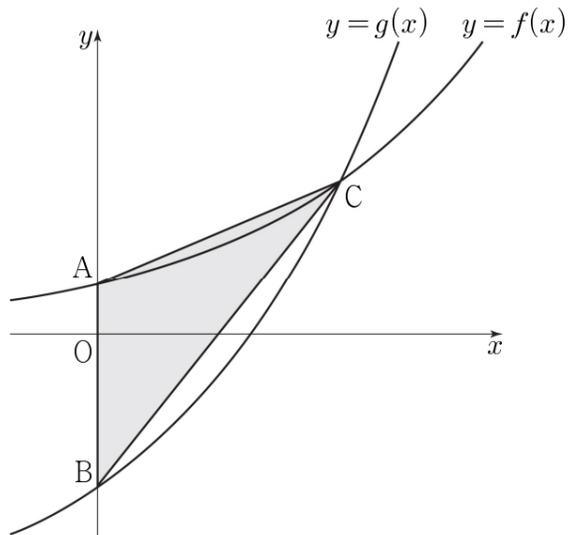
10. 두 상수 a, b 에 대하여 함수 $f(x) = a \cos bx$ 의 그래프가 그림과 같다. 함수 $g(x) = b \sin x + a$ 의 최댓값은? (단, $b > 0$) [3점]



- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

11. 그림과 같이 두 함수 $f(x)=\frac{2^x}{3}$, $g(x)=2^x-2$ 의 그래프가

y 축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고,
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 만나는 점을 C라 할 때,
삼각형 ABC의 넓이는? [3점]



- ① $\frac{1}{3} \log_2 3$ ② $\frac{2}{3} \log_2 3$ ③ $\log_2 3$
④ $\frac{4}{3} \log_2 3$ ⑤ $\frac{5}{3} \log_2 3$

12. 정수 전체의 집합의 두 부분집합

$$A = \{x \mid \log_2(x+1) \leq k\}$$

$$B = \{x \mid \log_2(x-2) - \log_{\frac{1}{2}}(x+1) \geq 2\}$$

에 대하여 $n(A \cap B) = 5$ 를 만족시키는 자연수 k 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

13. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가

$$xf(x) = 3^x + a + \int_0^x tf'(t)dt$$

를 만족시킬 때, $f(a)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.) [3점]

- ① $\frac{\ln 2}{6}$ ② $\frac{\ln 2}{3}$ ③ $\frac{\ln 2}{2}$ ④ $\frac{\ln 3}{3}$ ⑤ $\frac{\ln 3}{2}$

14. 집합 $A = \{x | x \text{는 } 25 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 부분집합 중

두 원소 1, 2를 모두 포함하고 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수는? [4점]

- ① 2^{18} ② 2^{19} ③ 2^{20} ④ 2^{21} ⑤ 2^{22}

15. 좌표평면 위에 두 점 $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$ 과

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 이 있다. 쌍곡선 위에 있고 제1사분면에 있는

점 P 에 대하여 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ 일 때, 원점을 중심으로 하고

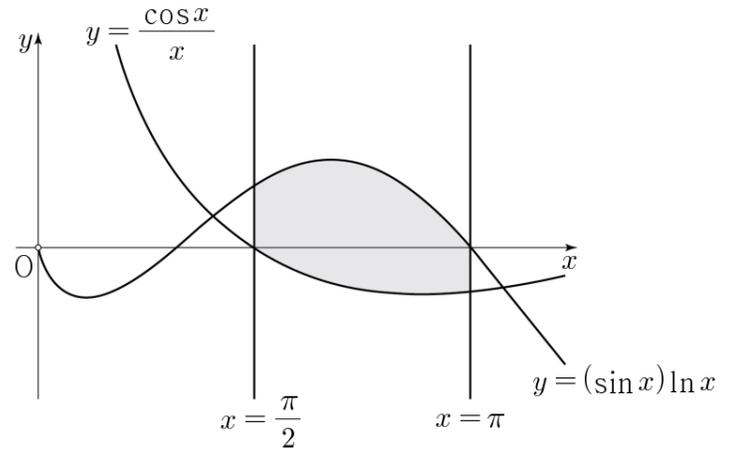
직선 AP 에 접하는 원의 반지름의 길이는? [4점]

- ① $\sqrt{7}-2$ ② $\sqrt{7}-1$ ③ $2\sqrt{2}-1$
 ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

16. 두 곡선 $y = (\sin x)\ln x$, $y = \frac{\cos x}{x}$ 와 두 직선 $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ 로

둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

- ① $\frac{1}{4}\ln\pi$ ② $\frac{1}{2}\ln\pi$ ③ $\frac{3}{4}\ln\pi$ ④ $\ln\pi$ ⑤ $\frac{5}{4}\ln\pi$



17. 다음은 비어 있는 세 주머니 A, B, C에 먼저 흰 공 6개를 남김없이 나누어 넣은 후 검은 공 6개를 남김없이 나누어 넣을 때, 빈 주머니가 생기지 않도록 나누어 넣는 경우의 수를 구하는 과정이다. (단, 같은 색의 공은 구별하지 않는다.)

빈 주머니가 생기지 않도록 나누어 넣는 경우의 수는 세 주머니 A, B, C에 먼저 흰 공 6개를 남김없이 나누어 넣은 후 검은 공 6개를 남김없이 나누어 넣을 때, 흰 공을 넣지 않은 주머니가 있으면 그 주머니에는 검은 공이 1개 이상 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수와 같다.

흰 공을 넣은 주머니의 개수를 n 이라 하면

(i) $n=3$ 일 때
세 주머니 A, B, C에 흰 공을 각각 1개 이상 나누어 넣은 후, 검은 공을 나누어 넣는 경우이므로 이 경우의 수는 ${}_3H_3 \times \boxed{\text{(가)}}$ 이다.

(ii) $n=2$ 일 때
세 주머니 A, B, C 중 2개의 주머니에 흰 공을 각각 1개 이상 나누어 넣은 후, 검은 공을 나누어 넣는 경우이므로 이 경우의 수는 $\boxed{\text{(나)}}$ 이다.

(iii) $n=1$ 일 때
세 주머니 A, B, C 중 1개의 주머니에 흰 공을 넣은 후, 검은 공을 나누어 넣는 경우이므로 이 경우의 수는 $\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는 ${}_3H_3 \times \boxed{\text{(가)}} + \boxed{\text{(나)}} + \boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r 라 할 때, $p+q+r$ 의 값은? [4점]

- ① 374 ② 381 ③ 388 ④ 395 ⑤ 402

18. 닫힌 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 정의된 함수 $f(x)=\sin x$ 의 그래프 위의

한 점 $P(a, \sin a)$ ($0 < a < \frac{\pi}{2}$)에서의 접선을 l 이라 하자.

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 직선 l 로 둘러싸인 부분의 넓이와 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x=a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 같을 때, $\cos a$ 의 값은? [4점]

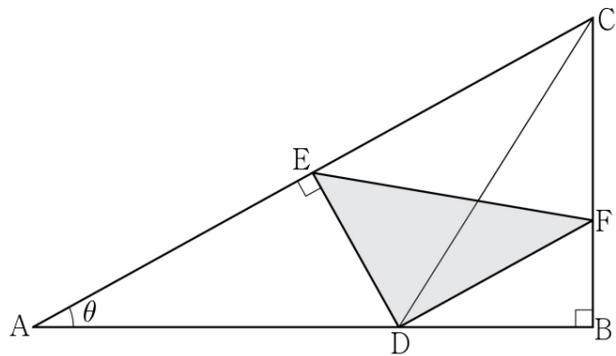
- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

19. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\angle B = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC에서

선분 AB 위에 $\overline{AD} = \overline{CD}$ 가 되도록 점 D를 잡는다. 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E, 점 D를 지나고 직선 AC에 평행한 직선이 선분 BC와 만나는 점을 F라 하자.

$\angle BAC = \theta$ 일 때, 삼각형 DEF의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자.

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



- ① $\frac{1}{32}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $\frac{3}{32}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{5}{32}$

20. 좌표평면 위에 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 직선 $y = 4$ 가 있다.

$t \neq -3, t \neq 3$ 인 실수 t 에 대하여 직선 $y = 4$ 위의

점 $P(t, 4)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 그은 두 접선의 기울기의 곱을 $f(t)$ 라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점]

< 보기 >

- ㄱ. $f(\sqrt{2}) = -1$
 ㄴ. 열린 구간 $(-3, 3)$ 에서 $f''(t) < 0$ 이다.
 ㄷ. 방정식 $9f(x) = 3^{x+2} - 7$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 자연수 n 에 대하여 열린 구간 $(3n-3, 3n)$ 에서 함수

$$f(x) = (2x - 3n)\sin 2x - (2x^2 - 6nx + 4n^2 - 1)\cos 2x$$

가 $x = \alpha$ 에서 극대 또는 극소가 되는 모든 α 의 값의 합을 a_n 이라 하자.

$\cos a_m = 0$ 이 되도록 하는 자연수 m 의 최솟값을 l 이라 할 때,

$\sum_{k=1}^{l+2} a_k$ 의 값은? [4점]

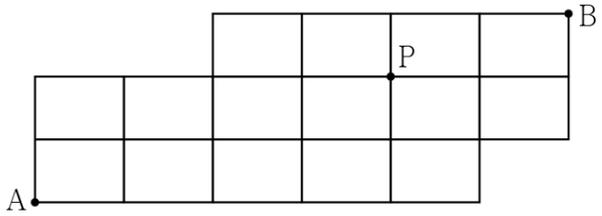
- ① $7 + \frac{45}{2}\pi$ ② $8 + \frac{45}{2}\pi$ ③ $7 + \frac{47}{2}\pi$
 ④ $8 + \frac{47}{2}\pi$ ⑤ $7 + \frac{49}{2}\pi$

단답형

22. ${}_2\Pi_5$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 함수 $f(x) = x^3 + 4\sqrt{x}$ 에 대하여 $f'(4)$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다.
이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나
B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수를 구하시오. [3점]



25. 곡선 $y = \frac{1}{3}x^3 + 2\ln x$ 의 변곡점에서의 접선의 기울기를
구하시오. [3점]

26. 좌표평면에서 점 $P(-2, k)$ 와 초점이 F인 포물선 $y^2 = 8x$
위의 점 Q에 대하여 $\overline{PQ} = \overline{QF} = 10$ 일 때, 양수 k 의 값을
구하시오. [4점]

27. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 있다.

$g(x)$ 가 $f(x)$ 의 역함수이고 $g(2)=1$, $g(5)=5$ 일 때,

$$\int_1^5 \frac{40}{g'(f(x))\{f(x)\}^2} dx \text{의 값을 구하시오. [4점]}$$

28. 할아버지, 할머니, 아버지, 어머니, 아이로 구성된 5명의 가족이 영화를 보려고 한다. 영화관의 좌석은 그림과 같이

A, B 두 개의 열로 이루어져 있고, 각 열에는 5개의 좌석이 있다.

A 열에는 할아버지와 할머니가 이웃하여 앉고,

B 열에는 아버지, 어머니, 아이가 앉되

아이는 아버지 또는 어머니와 이웃하고, 아이의 바로 앞에 있는 좌석은 비어 있도록 한다.

이때, 5명이 모두 좌석에 앉는 경우의 수를 구하시오.

(단, 2명이 같은 열의 바로 옆에 앉을 때만 이웃한 것으로 본다.

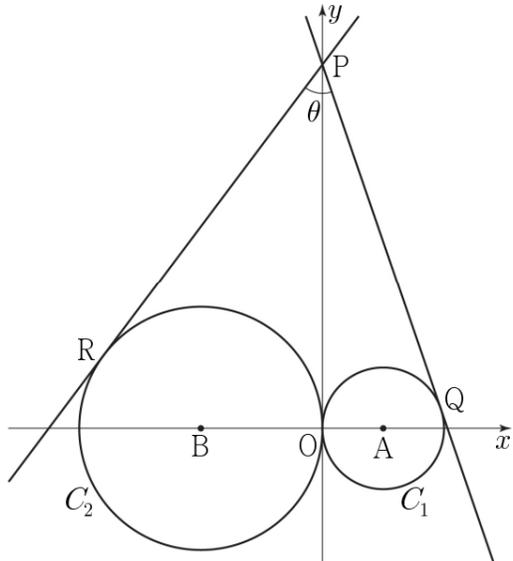
또한 한 좌석에는 한 명만 앉고, 다른 관객은 없다.) [4점]



29. 그림과 같이 중심이 점 $A(1, 0)$ 이고 반지름의 길이가 1인 원 C_1 과 중심이 점 $B(-2, 0)$ 이고 반지름의 길이가 2인 원 C_2 가 있다.

y 축 위의 점 $P(0, a)$ ($a > \sqrt{2}$)에서 원 C_1 에 그은 접선 중 y 축이 아닌 직선이 원 C_1 과 접하는 점을 Q , 원 C_2 에 그은 접선 중 y 축이 아닌 직선이 원 C_2 와 접하는 점을 R 라 하고 $\angle RPQ = \theta$ 라 하자.

$\tan \theta = \frac{4}{3}$ 일 때, $(a-3)^2$ 의 값을 구하시오. [4점]



30. 삼차함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ (a, b 는 정수)에 대하여

함수 $g(x) = e^{f(x)} - f(x)$ 는

$x = \alpha, x = -1, x = \beta$ ($\alpha < -1 < \beta$)에서만 극값을 갖는다.

함수 $y = |g(x) - g(\alpha)|$ 가 미분가능하지 않은 점의 개수가 2일 때,

$\{f(-1)\}^2$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항

답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.