

2017 국가직 추가선발 시험 수학 해설

번호	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
정답	④	②	④	④	②	④	②	③	①	③	①	②	③	④	②	④	①	③	②	②

해설

1. $3^{\frac{3}{2}} \times 5^3 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 5^{-2} = 3^2 \times 5 = 9 \times 5 = 45$

답: ④

2. 무한급수와 무한수열의 극한의 관계에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 3)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 3) = 0 \text{이다. 따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n + 2) = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 2 = 11$$

답: ②

$$3. P(A) = 1 - P(A^C) = \frac{2}{5}, P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \therefore P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{6} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{12}$$

답: ④

4. 이차방정식의 한 근이 $2+i$ 이므로 다른 한 근은 $2-i$ 이다.

따라서, 근과 계수의 관계에 의해 $a = -4$, $b = (2+i)(2-i) = 4 - i^2 = 5$

답: ④

5. $(A \cup B)^C = \{4\}$ 이므로 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$

$A \cup B$ 의 원소에서 $A - B$ 의 원소를 제외한 나머지가 B 의 원소이므로

$$B = \{1, 2, 6, 7\}$$

모든 원소의 합은 $1 + 2 + 6 + 7 = 16$

답: ②

6. $\log_2(a+b)=3$ 이므로 $a+b=8$

$\log_3 a + \log_3 b = \log_3 ab = 2$ 이므로 $ab=9$

$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 8^2 - 18 = 46$

답: ④

7. 주어진 삼차식이 $x-a$ 를 인수로 가지므로 인수분해 하면

$$x^3 + (1-2a)x^2 + (a^2 - a + 1)x - a = (x-a)(x^2 + (1-a)x + 1)$$

따라서 삼차방정식은 $x=a$ 라는 실근을 가지므로

이차방정식 $x^2 + (1-a)x + 1 = 0$ 이 두 개의 허근을 가져야 한다.

(판별식) < 0 이 성립해야 하므로 $(1-a)^2 - 4 < 0$

$$(1-a)^2 < 4$$

$$-2 < 1-a < 2$$

$$-1 < a < 3$$

답: ②

8. $x^3 + 3x - 5 = A(x+1) + 3x - 6$ 이므로

$$A = \frac{x^3 + 1}{x + 1}$$

$$A = \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x+1)}$$

$$A = x^2 - x + 1$$

답: ③

9. 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $f(1) = -\frac{1}{3}$

양변을 x 에 대해 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - 2x^2 + 4x$$

정리하면 $f'(x) = 2x - 4$

양변을 x 에 대해 적분하면

$$f(x) = x^2 - 4x + C$$

이때, $f(1) = -\frac{1}{3}$ 이므로 $C = \frac{8}{3}$

따라서 $f(2) = -\frac{4}{3}$

답: ①

10. 점 G 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 H , 직선 AG 가 선분 BC 와 만나는 점을 M 이라 하면 $\overline{BG} = \overline{MG} = 2$ (무게중심의 성질)이고 점 M 은 선분 BC 의 중점(무게중심의 정의)이다. $\overline{GH} = h$ 라 하면, $\overline{CH} = \overline{MH} + \overline{MC} = \sqrt{4-h^2} + 2\sqrt{4-h^2} = 3\sqrt{4-h^2}$ 이다. 직각삼각형 CGH 에서 $\overline{CG}^2 = \overline{GH}^2 + \overline{CH}^2$ 이므로

$$12 = h^2 + 9(4-h^2)$$

$$\therefore h = \sqrt{3}$$

삼각형 BGM 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$

삼각형 ABC 의 넓이는 삼각형 BGM 의 넓이의 6배이다. (무게중심의 성질)

답: ③

$$11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+6)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+6) = 7$$

답: ①

12. 식을 k 에 관해 정리하면 $(x-y-3)k + x + 2y = 0$

이 식이 임의의 실수 k 에 대하여 항상 성립해야 하므로 $x-y-3=0$, $x+2y=0$ 이어야 한다. 연립방정식을 풀면 $x=2$, $y=-1$

따라서 이 직선은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(2, -1)$ 을 지난다.

답: ②

13. $\sqrt{3x+a}$ 의 값은 x 의 값이 커질수록 커진다. 따라서 함수 $f(x)$ 의 값은 x 의 값이 커질수록 작아진다는 것을 알 수 있다. 따라서 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최댓값, $x=1$ 에서 최솟값을 가진다.

$$f(0) = 3 - \sqrt{a} = 2 \quad \therefore a = 1$$

$$f(1) = 3 - \sqrt{4} = 1$$

답: ③

14. $f(x)$ 와 $f^{-1}(x)$ 는 직선 $y=x$ 위의 점에서 만나므로

방정식 $f(x) = x$ 를 풀면

$$\sqrt{x+2}=x$$

$$x^2-x-2=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=-1$$

그런데, $f(x)$ 의 치역이 0보다 같거나 크므로 $f^{-1}(x)$ 의 정의역이 0보다 같거나 크다. 따라서 $x=-1$ 에서 $f(x)$ 와 $f^{-1}(x)$ 가 만날 수 없다.

그러므로 두 함수는 $x=2$ 일 때의 점 $(2,2)$ 에서 만난다.

점 P 는 $(2,2)$, 점 Q 는 $(2,0)$ 이므로 삼각형 OPQ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

답: ④

$$15. \overline{A_n B_n} = n^2, \overline{A_n A_{n+1}} = 1 \text{ 이므로 } S_n = n^2$$

$$\overline{B_n C_n} = 1, \overline{B_{n+1} C_n} = \overline{A_{n+1} B_{n+1}} - \overline{A_{n+1} C_n} = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 \text{ 이므로}$$

$$T_n = \frac{1}{2} \times \overline{B_n C_n} \times \overline{B_{n+1} C_n} = \frac{1}{2} (2n+1) = n + \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n^2}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + \frac{1}{2})^2}{n^2} = 1$$

답: ②

16. 구하는 값을 a 라 두면

$$P(Y \geq a) = 0.023$$

$$P(\frac{3}{2}X - 500 \geq a) = 0.023$$

$$P(X \geq \frac{2}{3}(500 + a)) = 0.023$$

X 는 평균이 4000이고 표준편차가 300인 정규분포를 따르므로 표준화하면

$$Z = \frac{X - 4000}{300}$$

이때 주어진 조건에 의해 $P(Z \geq 2) = 0.023$ 이므로

$$P(Z \geq 2) = P(\frac{X - 4000}{300} \geq 2) = P(X \geq 4600) = 0.023$$

$$\text{따라서 } \frac{2}{3}(500 + a) = 4600$$

$$\therefore a = 6400$$

답: ④

17. $f(1)=3-a$ 이므로

$$f(f(1))=7$$

$$f(3-a)=7$$

$$f(3-a)=(3-a)^2-a(3-a)+2=2a^2-9a+11=7$$

따라서 방정식 $2a^2-9a+4=0$ 을 만족시키는 모든 a 의 값의 합은

근과 계수의 관계에 의해 $\frac{9}{2}$ 이다.

답: ①

18. ㄱ. $f(0)=0, f(1)=1, f(2)=2, f(3)=3$ 이므로 함수이다.

ㄴ. $g(0)=2, g(1)=1, g(2)=0, g(3)=1$ 이므로 함수이다.

ㄷ. $h(0)=-1$ 이므로 치역이 공역에 포함되지 않으므로 함수가 아니다.

ㄹ. $i(0)=0, i(1)=1, i(2)=2, i(3)=3$ 이므로 함수이다.

답: ③

19. $f(x+1)=f(x)+c$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(1)=f(0)+c$$

$$\therefore c=2$$

$$f(x)=f(x+1)-2$$

$-1 \leq x < 0$ 일 때의 $f(x)$ 를 구하면

$$f(x+1)=2(x+1)^2 \text{이므로}$$

$$f(x)=2(x+1)^2-2 \text{이다.}$$

$-1 \leq x < 0$ 일 때 $f(x) < 0$ 이므로

$$\int_{-1}^1 |f(x)|dx = -\int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 (2-2(x+1)^2)dx + \int_0^1 2x^2dx = 2$$

(직접 적분하여 구할 수도 있지만 그래프를 그려서 구하는 두 부분의 넓이를 잘라 붙이면 밑변의 길이가 1이고 높이가 2인 직사각형 모양이 나옴을 알 수 있다.)

답: ②

20. 근과 계수의 관계에 의해서 $a_n = \frac{2}{n(n+2)}$

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{2}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12} = \frac{175}{132}$$

답: ㉔