1번

★ 정답	③
★ 출제영역	[수학1] 이차방정식
★ 난이도	하

★ 풀이

두 근의 비가 $2:3$이므로 두 근을 $2m$, $3m$이라 하면 근과계수와의 관계에 의하여 다음 두 등식이 성립합니다.

$2m+3m=10$,

$2m\times 3m=4k$

$m=2$이므로 두번째 식에 대입하면

$\therefore\ k=6$

2번

★ 정답	①
★ 출제영역	[수학1] 다항식 계산
★ 난이도	하

★ 풀이

합과 곱을 이용하여 식의 값을 구하는 문제입니다.

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

에 $x+y=3$, $x^3+y^3=9$를 대입하면 $xy=2$ 입니다.

$\therefore\ x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=5$

3번

★ 정답	②
★ 출제영역	[수학2] 집합과 명제(절대부등식)
★ 난이도	중

★ 풀이

산술-기하평균 관계는 다음과 같습니다.

$7a+5b\geq 2\sqrt{35ab}$

$7a+5b=6ab$를 위의 식에 대입한 후, $ab=t$라 치환하고 양 변을 제곱하여 정리하면 다음의 식을 구할 수 있습니다.

$9t^2\geq 35t$

$t>0$이므로 양 변을 t로 나누면

$t\geq\dfrac{35}{9}$

t의 최솟값$\left(=\dfrac{35}{9}\right)$보다 작거나 같은 자연수는 1, 2, 3 입니다.

$\therefore$ 3개

4번

★ 정답	④
★ 출제영역	[수학1] 나머지 정리
★ 난이도	중

★ 풀이

주어진 나눗셈을 식으로 나타내면 다음과 같습니다.

$P(x)=(x-2)(x-6)Q_1(x)+2x+1$ ㉠

$(x^2+1)P(x+3)=(x-3)(x+1)Q_2(x)+ax+b$ ㉡

㉠의 식에 $x=2$, 6을 각각 대입하면,

$P(2)=5$, $P(6)=13$ ㉢

㉡의 식에 $x=3$, -1을 각각 대입하면,

$10P(6)=3a+b$

$2P(2)=-a+b$

㉢에서 구한 값을 대입하고 연립하여 a, b를 구하면,

$a=30$, $b=40$

$R(x)=30x+40$이므로

$\therefore R(3)-2R(1)=130-140=-10$

5번

★ 정답	④
★ 출제영역	[수학1] 복소수의 연산
★ 난이도	하

★ 개념

$a \le 0,\ b \le 0$ 이면 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = -\sqrt{ab}$

$a \ge 0,\ b < 0$ 이면 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

★ 풀이

$\dfrac{\sqrt{2a+2}}{\sqrt{2a-2}} = -\sqrt{\dfrac{2a+2}{2a-2}}$ 이므로

$2a+2 \ge 0,\ 2a-2 < 0$

두 부등식을 연립하면

$-1 \le a < 1$

$a-1 < 0,\ a+1 \ge 0$ 이므로

$\therefore\ |a-1| - |a+1| = -(a-1)-(a+1) = -2a$

6번

★ 정답	②
★ 출제영역	[수학1] 도형의 방정식
★ 난이도	중

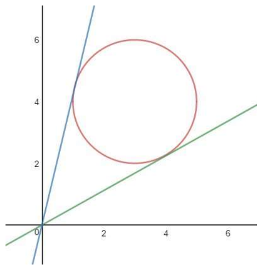
★ 개념

좌표평면 위의 한 점 $(x,\ y)$에 대하여

$\dfrac{y-b}{x-a}$: 두 점 $(x,\ y)$, $(a,\ b)$을 지나는 직선의 기울기

★ 풀이

$\dfrac{y}{x} = \dfrac{y-0}{x-0}$이므로 원 위의 한 점 $(x,\ y)$와 원점 $(0,\ 0)$을 지나는 직선의 기울기라 할 수 있습니다.



위의 그림에서 보면 알 수 있듯 원 위의 한 점과 원점을 지나는 직선의 기울기가 최대 또는 최소가 되는 경우는 원과 접할 때 입니다.

$y = kx$와 원이 접하기 위해서는 원의 중심에서 직선까지의 거리와 원의 반지름이 길이가 같아야 합니다.

$$\frac{|3k-4|}{\sqrt{k^2+1}} = 2$$

양변을 제곱하여 정리하면 다음과 같습니다.

$$5k^2 - 24k + 12 = 0$$

이 식의 두 근이 기울기의 최댓값, 최솟값이므로 근과 계수와의 관계에 의하여 다음 두 식을 얻을 수 있습니다.

$$M+m = \frac{24}{5},\quad Mm = \frac{12}{5}$$

$$\therefore\ Mm + M + m = \frac{36}{5}$$

7번

★ 정답	③
★ 출제영역	[수학1] 방정식과 부등식
★ 난이도	하

★ 개념

이차부등식 $f(x)<0$의 해가 $\alpha<x<\beta$이면
이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β 입니다.

★ 풀이

이차부등식 $x^2+ax+b<0$의 해가 $-1<x<3$이므로,
이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 -1, 3입니다.
근과 계수와의 관계에 의하여,
$-1+3=-a$, $-1\times3=b$
$\therefore a^2b=-12$

8번

★ 정답	①
★ 출제영역	[수학1] 다항식
★ 난이도	중

★ 풀이

미지수가 3개인 두 방정식을 연립하면 세 미지수를 한 미지수로 표현할 수 있습니다.

$x-2y-z=0$, $3x+y+z=0$

두 식을 더하면

$4x-y=0$

$y=4x$

이를 다시 위의 식에 대입하면,

$z=-7x$

$y=4x$, $z=-7x$를 준식에 대입하여 정리하면,

$$\therefore \frac{x^2-4y^2+z^2}{2xy-3xz+yz}=\frac{x^2-64x^2+49x^2}{8x^2+21x^2-28x^2}=-14$$

9번

★ 정답	③
★ 출제영역	[수학2] 수열의 합
★ 난이도	중

★ 개념

근호 안에 근호가 있는 경우는 다음을 이용하여 하나의 근호를 소거할 수 있습니다.

$$\sqrt{a+b\pm2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2}=|\sqrt{a}\pm\sqrt{b}|$$

★ 풀이

근호 안에 근호가 있으므로(이중근호) 더해서 $2k+1$, 곱해서 k^2+k가 되는 두 식을 찾아보면 다음과 같습니다.

k, $k+1$

따라서 $S(k)=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ 입니다.

$S(k)$를 대입하여 전개하면 다음과 같습니다.

$$\sum_{k=1}^{2017}S(k)=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{2018}-\sqrt{2017})$$
$$=\sqrt{2018}-1$$

$44<\sqrt{2018}<45$ 이므로 $\sqrt{2018}-1$보다 작은 소수는 다음과 같습니다.

$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43\}$

$\therefore$ 14개

10번

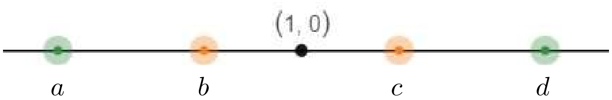
★ 정답	②
★ 출제영역	[수학2] 함수
★ 난이도	중

★ 개념

모든 실수 x에 대하여 $f(a+x)=f(b-x)$이 성립하면 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 대칭입니다.

★ 풀이

모든 실수 x에 대하여 $f\left(\dfrac{3}{2}+x\right)=f\left(\dfrac{1}{2}-x\right)$이 성립하므로 함수 $f(x)$ $x=1$대칭입니다.



함수 $f(x)$가 x축과 네 점에서 만나면 네 점은 위의 그림과 같이 $x=1$대칭입니다.
$b,\ c$의 중점 = $a,\ d$의 중점 = 1 이므로

$$\frac{b+c}{2}=\frac{a+d}{2}=1,$$

$\therefore\ 2a+b+c+2d=6$

11번

★ 정답	②
★ 출제영역	[수학1] 이차함수의 최대최소
★ 난이도	중

★ 풀이

y의 범위가 주어져 있으므로 x를 소거하여 y에 대한 2차식으로 만듭니다.
$x=y+1$을 x^2+y^2+1에 대입하여 정리하면,

$$2y^2+2y+2=2\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\quad(-1\le y\le 2)$$

범위 안에 축이 존재하므로 $y=-\dfrac{1}{2}$에서 최솟값 $\dfrac{3}{2}$
축에서 가장 멀리 떨어진 $y=2$에서 최댓값 14
$\therefore\ 2m+M=17$

12번

★ 정답	③
★ 출제영역	[수학1] 방정식
★ 난이도	중

★ 개념

$x^2+x+1=0$의 한 허근을 ω라 하면, 켤레복소수인 $\overline{\omega}$ 역시 근입니다. 각각 대입하면

i) $\omega^2+\omega+1=0$, $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$

근과 계수와의 관계에 의하여

ii) $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$x^2+x+1=0$에 $(x-1)$을 곱하면 $x^3=1$입니다.
각각 대입하면

iii) $\omega^3=1$, $\overline{\omega}^3=1$

ii), iii)을 이용하여 식을 변형해보면 다음과 같은 식을 더 얻을 수 있습니다.

iv) $\overline{\omega}^2=\omega$, $\omega^2=\overline{\omega}$

v) $\dfrac{1}{\omega}=\overline{\omega}=\omega^2$, $\dfrac{1}{\overline{\omega}}=\omega=\overline{\omega}^2$

★ 풀이

위에서 정리한 내용을 이용하여 다음 식을 간단히 해보겠습니다.

$$\frac{2\omega+\overline{\omega}^2}{\omega^2+\omega^{276}} \quad \text{iii) } \omega^3=1$$
$$=\frac{2\omega+\overline{\omega}^2}{\omega^2+1} \quad \text{iv) } \overline{\omega}^2=\omega$$
$$=\frac{2\omega+\omega}{\omega^2+1} \quad \text{i) } \omega^2+1=-\omega$$
$$=\frac{2\omega+\omega}{-\omega}$$
$$=-3$$

13번

★ 정답	①
★ 출제영역	[미적분1] 함수의 극한
★ 난이도	하

★ 풀이

$x\to1$일 때 분모가 0이므로 분자도 0이 되어야 합니다.

$1+a-b=0$

로피탈의 정리를 이용하면,

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-b}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{2x+a}{3x^2}=\frac{2+a}{3}=2$$

$a=4$

위의 식에 대입하면 $b=5$

$\therefore\ ab=20$

14번

★ 정답	③
★ 출제영역	[미적분1] 미분
★ 난이도	중

★ 개념

시각 t에서의 위치가 $f(t)$일 때, $f'(t)$는 시각 t에서의 속도를 의미합니다.

다음 내용을 기억하여 식을 세우면 되겠습니다.

두 점이 반대 방향으로 이동 = 두 점의 속도의 부호가 반대 = 두 점의 속도의 곱이 음수

두 점이 만난다 = 두 점의 위치가 같다.

★ 풀이

두 점의 위치에 대한 함수가 주어졌으므로 미분하면 속도에 대한 함수를 구할 수 있습니다.

$f'(t)=3t-4$, $g'(t)=2t-11$

두 점이 서로 반대방향으로 움직이므로 속도의 부호가 달라야 합니다.

$(3t-4)(2t-11)<0$

이를 만족하는 자연수 $t=2,\ 3,\ 4,\ 5$

$\therefore$ 모든 자연수의 합 = 15

15번

★ 정답	④
★ 출제영역	[미적분1] 미분, 적분
★ 난이도	하

★ 풀이

$f(x)=\int(x^2+3x)dx$ 이므로 $f'(x)=x^2+3x$ 입니다.

미분의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}\cdot 2\\&=2f'(1)\end{aligned}$$

$\therefore\ 2f'(1)=8$

16번

★ 정답	①
★ 출제영역	[미적분1] 정적분
★ 난이도	중

★ 개념

위끝과 아래끝이 상수인 정적분은 그 계산 결과가 상수입니다.

$$\int_a^b f(x)dx=k$$

★ 풀이

$3\int_0^1 f(x)dx=k$라 치환하여 원래의 식에 대입하면,

$$f(x)=4x^3-2x^2+k$$

$f(x)$를 위의 적분식에 다시 대입하면

$$3\int_0^1(4x^3-2x^2+k)dx=k$$

정적분을 계산하면 $k=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ f(2)=32-8-\frac{1}{2}=\frac{47}{2}$

17번

★ 정답	④
★ 출제영역	[미적분1] 정적분
★ 난이도	중

★ 풀이

무한급수와 정적분의 관계는 다음과 같습니다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx$$

★ 풀이

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{3-1}{n}k\right)\cdot\frac{3-1}{n}\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}\cdot\int_1^3 f(x)dx\end{aligned}$$

$f(x)=3x^2+4x$를 대입하여 정적분을 계산하면

$\therefore\ 21$

18번

★ 정답	③
★ 출제영역	[확률과 통계] 확률
★ 난이도	하

★ 풀이

두 수의 곱은 반드시 짝수 또는 홀수입니다.

두 수의 곱이 짝수일 확률

= 1 – 두 수의 곱이 홀수일 확률

두 수의 곱이 홀수가 되기 위해서는 두 수 모두 홀수이어야 합니다.

홀수를 두장 뽑을 확률 = $\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{2}{9}$

$\therefore\ 1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$

19번

★ 정답	①
★ 출제영역	[확률과 통계] 이항정리
★ 난이도	하

★ 개념

$(a+b)^n$을 전개식을 수열의 합으로 표현하면 다음과 같습니다.

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\, a^r\, b^{n-r}$$

★ 풀이

$\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{x}\right)^8$의 전개식에서의 일반항은 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} & {}_8C_r \left(\frac{x}{3}\right)^r \left(\frac{3}{x}\right)^{8-r} \\ =\ & {}_8C_r\, 3^{8-2r} \cdot x^{2r-8} \end{aligned}$$

$r=5$이면 x^2이므로 x^2의 계수는

$\therefore\ \ {}_8C_5\, 3^{-2} = \frac{56}{9}$

20번

★ 정답	②
★ 출제영역	[확률과통계] 통계적추정
★ 난이도	하

★ 풀이

모평균을 m이라 하면 다음과 같이 추정할 수 있습니다.

$$180 - 1.96 \cdot \frac{16}{\sqrt{64}} \le m \le 180 + 1.96 \cdot \frac{16}{\sqrt{64}}$$

$$176.08 \le m \le 183.92$$

만족하는 자연수 $m = 177,\ 178,\ 179,\ 180,\ 181,\ 182,\ 183$

$\therefore\ \ 7$개